

**HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSA BARLANGOK
TÉRFOGATÁNAK MEGHATÁROZÁSÁHOZ**

**THE APPLICATION OF DEFINITE INTEGRAL FOR THE
DETERMINATION OF CAVE VOLUME**

TARSOLY PÉTER – BEKK TÍMEA

Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar
Geoinformatikai Intézet

8000, Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3., tarsoly.peter@amk.uni-obuda.hu

Abstract: The small-size caves disposed also with a specific and unique microclimate, which differs from the climate of the surrounding environment. The microclimate parameters of the small-size caves linked strongly from the changes of the outer climate. The relationship between the cave and the environment can be understand through the volume of the cave and the air flow between the cave and the environment. The knowing of these parameters are very important for modelling in different dates the temperature and humidity of a cave, and the ventilation between the cave and the environment. When there are unique cross-section characterized parts of the caves, than based on the method of orthogonal surveying, the shape of the cave-parts can be modelled with polynoms. Using the definite integral the area of the cross-section can be calculate, and knowing the length of the unique cross-section characterized parts of the caves the volume can be determinate. In our investigation we determinate the volume of two wool-sack caves, the quantity of the ventilation between the caves and the environment in summer and winter season, too, and the duration of the complete ventilation. Based on the investigation between 2010 and 2016, we modified the bio- and microclimatological model of the wool-sack caves in the Fodor and Gressel cave climatological systems.

Keywords: definite integral, cave, volume, chimney-effect

Bevezetés

Talán a barlangklimatológia az egyetlen olyan tudományterülete a szpeleológiának, amelyről összefoglaló szakkönyv jelent meg *Fodor István* tollából 1981-ben, mégis elmondható, hogy törvényszerűségeit tekintve ez az egyik legkevésbé ismert szakterület. Különösen igaz ez a hazai nemkarsztos kőzetben lévő barlangokra, amelyek mindig is kevesebb érdeklődőt és kutatót vonzottak (*ESZTERHÁS*, 1994a, 2001, 2002; *TARSOLY*, 2013). A középhegységeink karsztos kőzettömegében előforduló fontos, nagy barlangjainkban hosszú idő óta folynak rendszeres megfigyelések a mikroklíma térképezésére, a barlangbeli és felszíni klíma-kapcsolat meghatározására. A kisbarlangok és barlangszerű objektumok azonban ugyanígy rendelkezhetnek sajátos, egyedi mikroklímával; kutatásukkal, különösen a nemkarsztos kőzetben lévő kisbarlangok mikroklímájával, eddig még senki

nem foglalkozott behatóbban. A kisbarlangokban természetesen nem alakulhat ki olyan tulajdonságokkal rendelkező mikroklíma, mint amely egy 50-100 méter mélységű barlangban megfigyelhető, de kétségtelen, hogy kisbarlangjaink „lélegeznek”, a környezettől eltérő klíma-paraméterekkel jellemezhetők, és tulajdonságaik összefüggnek a külső környezeti változásokkal. A barlang és környezetének kapcsolata csak akkor érthető meg, ha meg tudjuk határozni a barlangban „tárolt” levegő mennyiségét és a légáramlás mértékét, mert e paraméterek ismerete kulcsfontosságú a barlangok hőmérséklete és páratartalma, a külső környezettel történő légcsere modellezése szempontjából. Különösen jelentős az említett paraméterek ismerete az idegenforgalmilag vagy gyógyászatiilag hasznosított barlangok esetében. A barlangok térfogatának meghatározásához a klasszikus geodéziából ismert módszerek (pl. trapéz alapú hasábok képzése) nem használhatók kellő pontossággal a barlangjáratok szabálytalan keresztmetszetéből következően. Optimális megoldást jelent a lézerszkennelés alkalmazása, mert ebben az esetben a keletkező 3D pontfelhőből a térfogat könnyen meghatározható. A szkennelés azonban drága és csak korlátozott számú barlangban alkalmazható a szkennerek mérete, sérülékenysége és barlangi környezeti tényezőkre (pl. sár, csepegő víz stb.) való érzékenysége miatt. Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogy hogyan lehet egyszerű, minden barlangban alkalmazható mérési módszerekből származó mérési eredményekre alapozva határozott integrál segítségével a barlangok térfogatát meghatározni. Célkitűzés volt továbbá a kapott eredmények ismeretében a gyapjúzsákbarlangok bio- és mikroklimatológiai modelljének finomítása.

A határozott integrál fogalma és alkalmazása a területszámításban

Legyen adott az $y=f(x)$ függvény, amely egy $[a, b]$ zárt intervallumban mindenütt értelmezett. Az $y=f(x)$ függvény a -tól b -ig vett határozott integráljának az alábbi számot nevezzük (BÁRCZY, 1971):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

ahol Δx_i az $[a, b]$ zárt intervallum i -edik részintervallumának hossza, $f(\xi_i)$ az i -edik intervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényérték. Az összeg határértékét kell képeznünk olyan formában, hogy az intervallum osztópontjainak a számát úgy növeljük, hogy mindegyik részintervallum hossza nullához tartson. Ha a felírt határérték létezik, akkor az $y=f(x)$ függvény az a -tól b -ig terjedő zárt intervallumban integrálható. A határozott integrál a Newton-Leibnitz-féle formulával könnyen számítható:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad (2)$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény bármely primitív függvénye, és a szögletes zárójelben lévő függvénynek b helyen vett helyettesítési értékéből ki kell vonni az a helyen vett helyettesítési értékét. A határozott integrál kiszámítása tehát két feladatból áll: az integrandus valamely primitív függvényének megkeresése, majd a felső és alsó határ helyettesítési értéke különbségének képzése.

Az integrál geometriai értelmezéséből következik, hogy ha f korlátos és integrálható az $[a, b]$ intervallumon, és ha $f(x) \geq 0$, akkor az $\int_a^b f(x) dx$ annak a síkidom területének mérőszámát jelenti, amelyet az f grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek és az x tengely határolnak, feltéve, hogy $f(x) \leq 0$ ($x \in [a, b]$), akkor $-f(x) \geq 0$ és így (CSABINA, 2010):

$$\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \geq 0, \text{ azaz } \int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad (3)$$

Így a terület mérőszámát az integrál abszolút értéke, vagy annak -1 szerese adja. A határozott integrál lehetőséget nyújt görbék által közrezárt területek meghatározására is, ez pedig fontos a barlangok térfogatának meghatározása szempontjából. Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ által bezárt terület, ha $f(x) > g(x) > 0$ (CSABINA, 2010):

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (4)$$

Ez a képlet akkor is érvényes, ha $f(x)$ illetve $g(x)$ az intervallumon negatív értékeket is felvesz.

Vizsgálati anyag és módszer

A határozott integrál térfogatszámításban való alkalmazhatóságát két barlangon, illetve barlangszerű objektumon vizsgáltuk a Velencei-hegységben. A Zsivány-barlang (4510-2) és a Gömb-kő barlangja (4510-503) a Pákozdi Ingókövek Természetvédelmi Területen található. Mind a két üreg gránitporfirban található gyapjúzsákbarlang, tehát a hidrolízises mállás és aprózódás hatására alakultak ki a nagyméretű lekerekített sarkokkal rendelkező gránitkötömbök között (ESZTERHÁS, 1994b, 2006; TARSOLY, 2013). A felmérés során derékszögű koordinátamérést alkalmaztunk. A barlangban elkülönítettük az azonos keresztzelvénnyel jellemezhető szakaszokat, és meghatároztuk ezek hosszát, amely a térfogatszámításban, mint a testek magassága jelent meg. A keresztzelvények középvonalában, de mindenképpen a mérések végrehajtására a legkényelmesebb helyzetben egy vízszintes helyzetű mérési vonalat jelöltünk ki a barlang két fala között. A mérési vonalat fizikailag egy centiméteres osztású zsebszintezőlc testesítette meg. A mérési vonal lényegében egy helyi derékszögű koordinátarendszert határozott meg, amelynek origója a barlang bal oldali fala volt, a mérési vonal végpontja pedig a jobb oldali fal. Így az abszcissa értékek meghatá-

rozásánál csak pozitív értékek fordultak elő. Abszcissa és ordináta értékek segítségével rögzítettül a barlang mennyezetének és a járósíntnek a kereszt-szelvény alkotás szempontjából lényeges pontjait; a mennyezeten lévő pontok pozitív ordinátát, a járósínten lévő pontok pedig negatív ordinátát kaptak. Bonyolult kereszt-szelvények esetében előfordult, hogy a kereszt-szelvényt egy vagy több, fiktív, vízszintes vonallal több részre osztottuk, és részenként határoztuk meg a szelvények alját és tetejét leíró pontokat. Ebben az esetben a részek egyesített terület értékei adták meg a kereszt-szelvény területét, illetve a térfogat is részek térfogatának egyesítése után volt csak számítható. Amennyiben nem sikerült a barlangban azonos kereszt-szelvénnyel jellemezhető szakaszt elkülöníteni, mondjuk a járósínt vagy a mennyezet lejtése miatt, úgy az azonos lejtésű szakaszok kezdetére és végére s meghatároztunk egy-egy kereszt-szelvényt. Számítottuk a járatrész térfogatát a kisebb és a nagyobb kereszt-szelvényre alapozva is, majd képeztük a kettő különbségét. A különbség felével javítottuk a kisebb kereszt-szelvényből számított térfogat értékét, és ezt az értéket fogadtuk el a járat végleges térfogatának (felező-technika). Amennyiben a lejtős szakaszok rövidék, úgy mindez a gyakorlat szempontjából megengedhető közelítést jelent, amit a csonkagúla térfogatára alapozva bizonyítottunk be (LATKA, 1980):

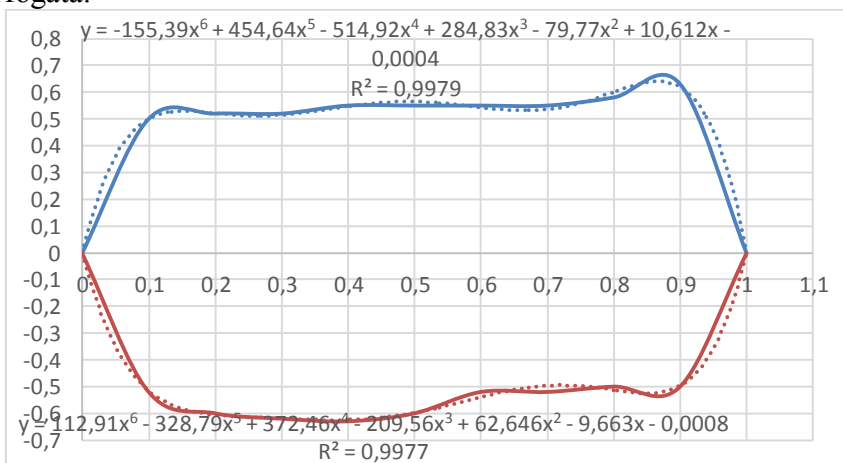
$$V = \frac{m \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)}{3} \quad (6)$$

ahol m a csonkagúla magassága, T az alaplap területe, t pedig a fedőlap területe. A barlangjárat térfogata lényegében csonkagúlaként határozható meg, ahol T a nagyobbik, t pedig a kisebbik kereszt-szelvény területét jelenti.

Alaptézisként azt fogalmaztuk meg, hogy az eredeti és a kereszt-szelvényekből a felező-technika segítségével számított térfogat különbsége nem lehet nagyobb, mint 1%. A vizsgálatok alapján kiderült, hogy a járat hosszának (csonkagúla magassága) nincs számottevő hatása a térfogatok eltérésére, amennyiben a $t:T$ arány nem haladja meg az $1:1.6$ értéket. Az egyedüli korlátozó tényező tehát a kisebbik és nagyobbik kereszt-szelvény területének aránya. Terepen a kereszt-szelvények területeit nem tudjuk számítani, ezért arányukra is csak következtetni tudunk. Amennyiben a kisebbik és nagyobbik kereszt-szelvényben a mérési vonalak és ordináták aránya alatta marad az $1:1.6$ aránynak, úgy a fent említett felező-technika valóban megfelelő közelítést ad.

A felmért derékszögű koordinátákkal jellemezhető pontsorra különböző fokszámú polinomokat illesztettünk (1. ábra), majd a mennyezetet és a járósínt leíró polinomok közötti terület értékét határozott integrállal számítottuk ki a *MathCad Professional* programcsomag segítségével. A kereszt-szelvény területét szorozva a járathosszal képezhető volt a barlang

egyes szakaszainak térfogata, majd a szakaszok összegzésével a teljes barlang térfogata.



1. ábra A Zsivány-barlang III-as keresztmetszéne (vastag vonal), az erre illesztett hatodfokú polinomok (szaggatott vonal), továbbá a polinomok képlete és a determinátsági koefficiens
 FIG.1. The third cross-section of the Zsivány-cave (thick line), the fitted six-degree polynom (broken line), the equation of the polynom and the determinate coefficient

A barlang és a felszín között légcseré számításához az alábbi összefüggéseket használtuk fel (LOSONCI, 2010):

$$Q = K \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h \cdot \frac{T_i - T_0}{T_i}}, \text{ ha } T_i > T_0$$

$$Q = K \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h \cdot \frac{T_0 - T_i}{T_0}}, \text{ ha } T_0 > T_i \quad (5)$$

ahol

Q = légáramlás, m^3/s -ban,

A = a bejáratok felülete m^2 -ben,

K = felszíni légnyomás együtthatója, általában 0.65,

g =nehézségi gyorsulás, $9.81 m/s^2$,

Δh =vertikális kiterjedés méterben,

T_i = átlagos belső hőmérséklet Kelvin fokban,

T_0 =külső léghőmérséklet Kelvin fokban.

2010 és 2012 decembere között mikroklimatológiai méréseket és szinkronméréseket végeztünk összesen hét gyapjúzsákbarlangnál (TARSOLY, 2013).

Mivel a gyapjúzsákbarlangok kisméretűek és két vagy több nyíláson keresztül kapcsolatban vannak a külvilággal, ezért ezeken keresztül közvetlen kapcsolatban vannak az atmoszférikus légnyomás, hőmérséklet és áramlási viszonyokkal is, tehát az év minden szakaszában meghatározó a felszín-

nel történő levegőcsere, azaz az advektív légáramlatok jelenléte. Az 5-dik képlet számításához szükséges az átlagos belső és külső hőmérsékletek különbségének ismerete, vizsgálataink alapján a 12 hónapra számított érték 0.7 °C gyapjúzsákbarlangok esetében (TARSOLY, 2013).

Az eredmények értékelése

A Gömb-kő barlangja esetében két helyen kellett keresztmetszelvényt felvenni, ezek egyben a barlang bejáratai is. A főbejáratra egy ötödfokú polinomot illesztettünk, az illesztés megfelelőségét mutató determináltsági koefficiens értéke 92% lett. A mellékbejáratra egy hatodfokú polinomot illesztettünk, a determináltsági koefficiens értéke 98%-ra adódott. A Zsivány-barlang esetében nyolc keresztmetszelvényt kellett definiálnunk, kettő kivételével, amelyeket ötödfokú polinommal tudtunk modellezni, a többiekre hatodfokú polinomot illesztettünk. A determináltsági koefficiens egyetlen esetben 59%-ra adódott, míg a többi esetben 90-99% között szóródott. Az 59%-os illesztés a szóban forgó bejárat szabálytalanságából adódott. Megoldást jelentett volna a keresztmetszelvény szakaszolása, és szakaszonként harmadfokú (spline) polinomok illesztése, de mivel a polinom és a tényleges keresztmetszelvény közötti merőleges eltérés sehol sem haladta meg a 2.0 centimétert, ezért ezt a csekélyebb megbízhatóságú polinomot is elfogadtuk.

Az I. táblázat foglalja össze a barlangokra számított bejárati terület, járatátfogat, légáramlás értékeket téli és nyári időszakban. A számításhoz átlagos téli és nyári hőmérsékletnek a felszínen és a barlangban, a 2012 februárjában és júniusában, a Gömb-kő barlangjában és a Zsivány-barlangban mért értékeket fogadtuk el (TARSOLY, 2013); a járatok átlagos magasságát a keresztmetszelvényekben mért ordináta értékek átlagolásával nyertük.

1. táblázat

Table I.

A Gömb-kő barlangjára és a Zsivány-barlangra vonatkozó terület, térfogat és légáramlás paraméter értékek
Area, volume and ventilation data of the Zsivány-, and Gömb-kő-caves

Név	Bejáratok területe [m ²]	Járatok térfogata [m ³]	Légáramlás [m ³ /s] T _i >T _o (tél)	Teljes légcseré [s]	Légáramlás [m ³ /s] T _o >T _i (nyár)	Teljes légcseré [s]
Gömb-kő barlangja	2.2615	2.507767	0.270308	9	0.259343	10
Zsivány-barlang	3.9488	8.081553	0.350731	23	0.336503	24

Az I. táblázat adatait elemezve elmondhatjuk, hogy a vizsgált gyapjúzsákbarlangok a csekély hosszúság és járatátfogat mellett nagy bejárati felülettel rendelkeznek, ezért mind télen, mind nyáron intenzív a külső környezettel történő légcseré mértéke. A téli és nyári teljes levegőkicserélő-

dés időtartama között nincs számottevő különbség. A Gömb-kő barlangja esetében egy perc alatt mintegy 6 teljes légcseré történik, a Zsivány-barlang esetében pedig kettő. A fenti adatok alátámasztják a 2010-2012 között végzett vizsgálatokra alapozott, a gyapjúzsákbarlangok bio- és mikroklimatológiai modelljével kapcsolatban megállapított tényeket. A gyapjúzsákbarlangok elsődlegesen hűvösérzetet keltő barlangok, de éves periódusát vizsgálva van a barlangoknak olyan hosszabb időszak, amikor a komfortérzetet adó barlangok közé lehet őket besorolni. Egy rövidebb időszakban (bármely nyári hónapban) a gyapjúzsákbarlangok a kifejezetten melegérzetet keltő barlangok közé tartoznak; és egy egészen rövid időszakban (bármely téli hónapban), pedig a hidegérzetet keltő barlangok közé.

A FODOR (1981) által meghatározott klimatikus barlangtípus modellek közé csak részben lehet a gyapjúzsákbarlangokat elhelyezni. Ebben a rendszerben a gyapjúzsákbarlangok a hűvösérzetet keltő dinamikus barlangtípusok közé tartoznak, azonban a FODOR által megadott paramétereket a gyapjúzsákbarlangok esetében módosítottam a 2010-2012 között, és a 2016-os évben végzett vizsgálatok alapján (II. táblázat).

II táblázat.
Table II.

Gyapjúzsákbarlangok klimatikus modellje
The climate model of the wool-sack caves

Klimatikus barlangtípus – hűvösérzetet keltő barlangok						
Gyapjúzsákbarlangok	Bradtké-féle index éves átlag	A barlang morfostruktúrája és légáramlási rendszere alapján	Léghőmérséklet éves átlag [°C]	Relatív nedvesség [%]	Vízgőznyomás [mbar]	Teljes légcseré [s]
	B~2.1	dinamikus	$x_t = 1.1-12.0$ $\sigma_d > 1.5$	$x_u = 60-80$	$x_v \leq 15.0$ $\sigma_d > 1.0$	$t < 30$ s

GRESSEL (1958) besorolási rendszerében a kutatásaink alapján a gyapjúzsákbarlangok a dinamikus barlangok közé tartoznak. Mivel a gyapjúzsákbarlangok két vagy több nyíláson keresztül kapcsolatban vannak a külvilággal, ezért ezeken keresztül közvetlen kapcsolatban vannak az atmoszférikus légnyomás, hőmérséklet és áramlási viszonyokkal is, tehát az év minden szakaszában meghatározó a felszínnel történő levegőcsere. Télen a gyapjúzsákbarlangok – a rendkívüli felmelegedésektől eltekintve - tisztán dinamikus barlangként viselkednek, azaz $t_{\text{felszíni}} < t_{\text{barlangi}}$, nyáron azonban – eltekintve a szélsőséges időjárású napoktól - $t_{\text{felszíni}} > t_{\text{barlangi}}$, ezért a barlangok viselkedésében statikus elemek (a barlang döntően csak egy bejáraton keresztül szellőzik) is megfigyelhetők.

Összefoglalás

A kisbarlangok és barlangszerű objektumok rendelkezhetnek sajátos, egyedi mikroklimával. A kisbarlangok a környezettől eltérő klíma-paraméterekkel jellemezhetők, és tulajdonságaik erősen összefüggnek a külső környezeti változásokkal. A barlang és környezetének kapcsolata csak akkor érthető meg, ha meg tudjuk határozni a barlangban „tárolt” levegő mennyiségét és a légáramlás mértékét, mert e paraméterek ismerete kulcsfontosságú a barlangok hőmérséklete és páratartalma, a külső környezettel történő légcsere modellezése szempontjából. Kutatásom során megállapítottam, hogy a barlangban amennyiben lehetséges azonos keresztmetszelvénnyel jellemezhető járat-szakaszok elkülönítése, akkor derékszögű koordinátamérésre alapozva a járatok modellezhetők különböző fokú polinomokkal, és ezekből határozott integrál felhasználásával a terület, a járat hosszának ismeretében pedig a térfogat levezethető. Ismerve a gyapjúzsákbarlangok mikroklimatológiai paramétereit, meghatároztam a Gömb-kő barlangja és a Zsivány-barlang esetében a téli és nyári időszakban jellemző légáramlás mértékét, illetve a teljes légcserehez szükséges időtartamot. A 2010-2012 között, és a 2016-os évben végzett vizsgálatok alapján módosítottam a gyapjúzsákbarlangokra meghatározott bio- és mikroklimatológiai modellt; azaz a gyapjúzsákbarlangokat elhelyeztem a Fodor-, és Gressel-féle barlangklimatológiai rendszerekben.

IRODALOM

- BÁRCZY B.* (1971): Integrálszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp. 167-169.
- CSABINA Z.* (2010): Integrálszámítás alkalmazása, Matematika példatár 5., Nyugat-magyarországi Egyetem, Székesfehérvár, pp. 1-6.
- ESZTERHÁS I.* (1994a): Magyarország jégbarlangjai - Lychnis, a Vulkánszpeleológiai Kollektíva kiadványa, Kapolcs pp. 36-42
- ESZTERHÁS I.* (1994b): A Velencei-hegység barlangjai, Vulkánszpeleológiai Kollektíva Kiadványa, Kapolcs pp.52-54
- ESZTERHÁS I.* (2001): Néhány klimatológiai mérés Szilvás-kő barlangjaiban- kézirat a Vulkánszpeleológiai Kollektíva Évkönyvében pp.114-120
- ESZTERHÁS I.* (2002): A mérsékelt öv jégbarlangjai bazaltban - Karsztfejlődés VII., pp. 259-267
- ESZTERHÁS I.* (2006): Felszíni denudációs formák és gyapjúzsákbarlangok a Velencei-hegység gránitjában, Karsztfejlődés XI., pp. 195-208

- FODOR I.* (1981): A barlangok éghajlati és bioklimatológiai sajátosságai, Akadémiai Kiadó, Budapest, p. 190
- GRESSEL W.* (1958): Über die Bewetterung der alpinen Höhlen. Meteorologische Rundschau 11(2) pp. 40-46.
- LATKA F.* (1980): Matematikai képletgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 134 p.
- LOSONCI G.* (2010): A huzat és a barlangkutatás, 11 p. (http://www.gubacs.hu/konyvek-irasok/huzat_losi.pdf, érvényes 2010.12.10.)
- TARSOLY P.* (2013): A térinformatikai célú adatgyűjtés minősítése, fejlesztése és módszertani alkalmazása a gyapjúzsákbarlangok kutatásában. PhD-dolgozat, Nyugat-magyarországi Egyetem, Sopron, 129 p.