

## **A DOLOMIT KARSZTOS LEPUSZTULÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLJE**

PÉNTEK KÁLMÁN

Nyugat-magyarországi Egyetem, Természettudományi Kar, Matematika és  
Fizikai Intézet 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.  
pentek@ttk.nyme.hu

*Abstract: In the paper we present the mathematical description of the denudation process of dolomite, which occurs in the zone of debris. Calcite-brooks are percolating the dolomite and become shingly. We are modeling the destruction of dolomite with the solution of ideal dolomite spheres, which surface is covered by calcite layer. The presented model in this paper is the natural generalization of the description model of the zone of debris of the solution of chalk. The detailed expressions are in accordance with the former description of expressions of karstic theory.*

### **1. Bevezetés**

A dolgozatban a murvásodó dolomit karsztos denudációs folyamatának egy lehetséges matematikai modelljével ismerkedhetünk meg. A tárgyalásra kerülő modell felhasználásával lehetőségünk lesz a dolomit denudációs sebességének meghatározására is.

A dolomit karsztos pusztulási folyamatát több szerző, pl. *JAKUCS* (1971) és *VERESS* (1998) vizsgálta és a denudáció sebességének kísérleti méréses módszerekkel történő meghatározásával is találkozhatunk (*IZÁPY-MAUCHA*, 2000).

Amint az közismert, a mészkő és a dolomit karsztos pusztulása a térben két jól elkülöníthető tartományban, a felszínen és az áramló karsztvíz övében megy végbe (*JAKUCS*, 1971). Maga a karsztos felszín is két, lényegesen különböző módon pusztulhat a beszivárgó csapadékvizek hidrokarbonátos oldásának hatására: horizontális karsztosodással (*VERESS-PÉNTEK*, 1990, 1994, 1996), továbbá vertikális karsztosodással (*VERESS-PÉNTEK*, 1994, 1995, 1998). A horizontális karsztosodás hatására alakul ki az oldásos dolinákat tartalmazó karsztos térszín, a vertikális karsztosodással pedig a hasadékok, kürtők és aknák rendszerét tartalmazó karsztos térszín fejlődik ki.

A klasszikus horizontális denudációs modellt több lépésben finomította és fejlesztette *PÉNTEK* (2001), *PÉNTEK-VERESS* (2002), valamint *PÉNTEK* (2007, 2008). Ezen modellek a mészkő karsztos pusztulását írták

le, így kívánatos célként fogalmazódott meg a dolomit denudációs modellje felépítésének igénye.

A karsztos pusztulás matematikai leírásának alapja *NERNST* (1904) klasszikus differenciálegyenlete. Az alábbiakban bemutatandó matematikai modellben a kalciterekkel átszótt murvásodó dolomit karsztos denudációját vizsgáljuk, levezetjük a denudációs sebességet kiszámító formulát. Meghatározzuk azokat a paramétereket, amelyek befolyásolják, illetve meghatározzák a dolomit denudációját. Tárgyalásunk a mészkő denudációjára kidolgozott lineáris modell (*PÉNTEK*, 2001) dolomitra történő általánosítása.

## 2. Geomorfológiai modell

A dolomit ásvány  $[CaMg(CO_3)_2]$  egy kettős só. A vegytiszta dolomitzórzet és a mészkő között a természetben számos átmenet fordul elő. A dolomitzórzetekben általában az elméleti normál dolomit arányánál nagyobb mennyiségű  $CaCO_3$  komponens található. Ez a felesleges mészanyag kalcit formájában cementálja össze a dolomit ásvány kristályait. Az oldódás során előbb a kalcit tapasztó anyag kerül az oldatba, így a dolomit murvásodik. Ezután a murvásodott dolomit oldódása során előbb a *Ca*, majd ezt követően az *Mg* ionok kerülnek oldatba (*JAKUCS*, 1971), továbbá (*VERESS*, 1998). Ezt az oldási folyamatot tárgyaljuk a továbbiakban.

A dolomit karsztos pusztulása geomorfológiai modelljének megalkotása során egy talajréteggel borított, kalciterekkel szövetszerűen átjárt, repedezett horizontális elhelyezkedésű dolomit térszínből indulunk ki. A talajon áthaladó csapadékvíz széndioxiddal feldúsul, amire lefelé haladva eléri a kőzet felszínét. A kőzetbe szivárgó víz feltevésünk szerint először a kalcit tapasztó anyagát oldja fel, majd a dolomit felületi oldás hatására darabokra különül, majd oldódik tovább. Miközben az oldószer lefelé halad, fokozatosan a feloldott kalcit, illetve dolomit anyagától fokozatosan telítődve elveszti oldóképességét. A kőzet a térben minden irányban kialakult repedések mentén végbemenő oldás hatására törmelékdarabokra különül, murvásodik, s ezáltal kifejlődik a szálkőzet felső tartományából feltevésünk szerint egy két, horizontális tartományra tagolható törmelékes oldódási zóna. Modellünk feltevése szerint az alsó tartományban oldódik a kalcit tapasztó anyag, s ezáltal itt a törmelékes oldódási zóna lényegében úgy működik, mintha mészkőtörmelék oldódna. A felső tartományban pedig a murvásodott dolomit törmelék felülete oldódik a tiszta dolomitra jellemző kisebb oldási intenzitással.

A szálkőzetről leváló törmelékdarabok méretét a kőzet repedezettségének mértéke határozza meg. A törmelékdarabok mérete a szálkőzettől felfelé haladva fokozatosan csökken. E tapasztalat magyarázata egyrészt az, hogy a kétrétegű törmelékes zóna felső részén található törmelékdarabok korábban szakadtak le a szálkőzetről, másrészt itt a zóna felső tartományában leghatékonyabb az oldási folyamat, mivel itt legagresszívebb a felülről érkező oldószer.

A kétrétegű törmelékes oldódási zóna folyamatosan lefelé tolódik el, hiszen az oldás hatására a zóna felső tartományában eltűnnek a teljesen feloldott törmelékdarabok. Ezért a még nem teljesen telítődött oldószer a szálban álló, repedezett kőzet felső tartományába nyomulhat, s így a törmelékes zóna a szálkőzet aprózódásával alulról pótlódik. Ha az oldás körülményei számottevően nem módosulnak, valamint a kőzet jellege is lényegében a vizsgált tartományban azonos, akkor az oldási folyamatra jellemző vastagságú, valamint rögzített arányban kettős rétegű – felül dolomit, alul kalcit bevonatos dolomitos – törmelékes oldódási zóna fejlődik ki.

A szálkőzet és a törmelékes oldódási zóna alsó határa abban a mélységben található, ahol az oldószer telítődik, s e határ a zóna felső szélével dinamikus egyensúlyban egy rögzített vastagságú oldási tartományt képezve folyamatosan süllyed lefelé. Ha az oldás körülményei megváltoznak, akkor megváltozik a kettős rétegű oldódási zóna vastagsága és rétegzettségének arányai és egy új dinamikus egyensúlyi állapot alakul ki. A törmelékes oldódási zóna, s vele együtt karsztos felszín is olyan ütemben süllyed, ahogyan ezt a zónát képező törmelékdarabok oldódása megengedi.

A mészkő térszínének denudációjához hasonlóan a törmelékes oldódási zóna elvileg a nyílt, vagy fedetlen dolomit karszt teljes területén megszakítás nélkül kifejlődhet. Természetesen az egyes dolomitos karsztos térszíneken az oldást meghatározó tényezők helyileg jelentősen különbözhetnek egymástól, így a térszín különböző helyein a lepusztulás sebessége is eltérő lehet. Ez a különböző lepusztulási sebesség felelős a dolomitos térszínnek jellegzetes formakincsének kialakulásáért.

### **3. Matematikai modell**

A dolomit karsztos pusztulása matematikai modelljének megalkotása során az előző részben kifejtett geomorfológiai modell alapvető tulajdonságait megtartjuk, de néhány egyszerűsítő idealizáló feltevést fogalmazzunk meg. Feltevéseink a következők:

a) A karsztosodó kalciteres dolomit felső tartományában a repedések három ekvidisztáns párhuzamos síkrendszert alkotnak. E síknyalábok rendszere

páronként egymásra merőleges, egyikük horizontális elhelyezkedésű. E három síkrendszer a szálkőzet felső tartományát egymással egybevető,  $a$  élhosszúságú kockák rendszerére bontja szét.

b) Az a) részben megkonstruált kockák rendszerében  $a = 2R$  átmérőjű törmelékgömbök rendszere helyezkedik el, amelyek mindegyikének középső azonos  $r (< R)$  sugarú részében egy-egy dolomit gömb, az ezt burkoló  $r$  és  $R$  sugarakkal határolt gömbhéjban pedig kalcit bevonat található. Valamennyi törmelékgömb középpontja a teljes oldódási folyamat során az adott gömböt eredetileg tartalmazó  $a$  élhosszúságú kocka középpontjában marad.

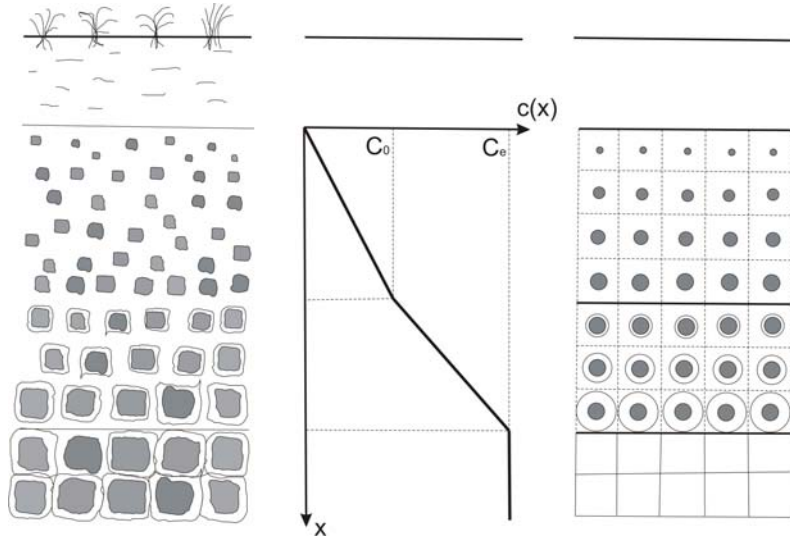
c) A b) részben megkonstruált törmelékgömbök rendszere alkotja az ideális törmelékes oldódási zónát. A zóna két horizontális tartományra különíthető. Az alsó tartományt azok a horizontális törmelékgömb rétegek alkotják, amelyek felületén még az egyes gömbhéjából a kalcit oldódik, a felső tartományt pedig azok a horizontális törmelékgömb rétegek, amelyeknek már a középső részében található dolomit oldódik.

d) Az ideális törmelékes oldódási zónában elhelyezkedő törmelékgömbök  $a$  átmérője lényegesen kisebb a zóna  $d$  vastagságánál, továbbá érvényes ez a megállapítás alsó kalcit oldódási  $d_C$ , valamint a felső dolomit oldódási  $d_D$  tartomány vastagságára egyaránt. Az ideális törmelékes oldódási zónát alkotó gömbök sugara alulról, a gömbök zárt közös térkitöltésétől indulva fölfelé haladva fokozatosan csökken az oldás hatására és tart nullához, vagyis a gömbök teljes feloldódásához.

e) Az ideális törmelékes oldódási zónán átszivárgó oldószer oldott anyag koncentrációja a zóna felső határától mért  $x$  mélység függvényében a

$$(1) \quad C(x) = \begin{cases} \frac{C_0}{d_D} \cdot x, & \text{ha } 0 \leq x < d_D \\ \frac{C_e - C_0}{d_C} (x - d_D) + C_0, & \text{ha } d_D \leq x < d \end{cases}$$

összefüggéssel írható le, ahol  $C_0$  a felső dolomittartományon áthaladt oldószer oldott anyag koncentrációja,  $C_e$  pedig az oldószer egyensúlyi koncentrációja. Látható, hogy feltevésünk szerint a lefelé haladó oldószer a megtett út alapján a dolomitos törmeléken áthaladva kisebb mértékben, a kalcitos törmeléken áthaladva nagyobb mértékben, de mindkét szakaszon lineáris függvény szerint telítődik (1. ábra).



1. ábra: A törmelékzónás karsztos térszín ideális oldódási modellje  
 Jelmagyarázat: a) a karsztosodó térszín ideális keresztmetszelve, b) a  $C = C(x)$  függvény, c) a geometriai modell

Fig. 1: Ideal dissolution model of the karst of the zone of debris  
 Legend: a) the ideal cross-section of the karstification ground surface, b) the  $C=C(x)$  function, c) the geometric model

A mészkő, illetve a dolomit hidrokarbonátos oldódása klasszikus matematikai leírását *NERNST* (1904) adta meg a

$$(2) \quad \frac{dm}{dt} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot S \cdot (C_e - C)$$

alakú differenciálegyenlet segítségével. Itt

$m$  [kg] = a kőzet oldásnak kitett felületéről eltávozott tömeg,

$t$  [s] = a kőzet oldódásának időtartama,

$k_K$  [m/s] = a kémiai oldás sebességi állandója,

$k_T$  [m/s] = a határretegben lejátszódó anyagtranszport sebességi állandója,

$S$  [m<sup>2</sup>] = az oldódó kőzet felülete,

$C_e$  [kg/m<sup>3</sup>] = az oldószer egyensúlyi koncentrációja

$C$  [kg/m<sup>3</sup>] = az oldószer aktuális pillanatnyi oldott anyag koncentrációja.

Az anyagtranszport sebessége *DUBLJANSZKIJ* (1987) nyomán felírható a

$$(3) \quad k_T = \frac{85}{8} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}$$

alakban, ahol

$\delta$  [m] = az áramló rendszerre jellemző karakterisztikus méret, jelen esetben az egyes törmelékgömbök átmérője,

$D$  [m<sup>2</sup>/s] = a diffúziós állandó,

$\nu$  [m<sup>2</sup>/s] = az áramló oldószer kinematikai viszkozitási tényezője.

Ha  $\rho$  jelöli a mészkő, illetve a dolomit sűrűségét,  $dR$  az  $S$  pillanatnyi felszínű törmelékgömb sugarának  $dt$  idő alatti megváltozását, akkor érvényes a

$$(4) \quad \frac{dm}{dt} = -\rho \cdot S \cdot \frac{dR}{dt}$$

összefüggés, amelynek felhasználásával a (2) differenciálegyenlet a

$$(5) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot \frac{C_e - C}{\rho}$$

alakban írható fel. A (3) képlet (5) formulába történő behelyettesítésével rendezés és összevonás után nyerhetjük a

$$(6) \quad \frac{dt}{dR} = -\left( \frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\rho}{C_e - C}$$

összefüggést. A (6) differenciálegyenlet képezi számításaink kiinduló pontját, amelynek alapvető célja a kalciterekkel átszótt dolomitos térszín lepusztulási sebességének meghatározása.

Megjegyezzük, hogy a további részekben a (2), (3), (4), (5) és (6) egyenletek felhasználása során az egyes mennyiségeket jelölő betűk lábindexében szerepeltetjük a  $D$ , illetve a  $C$  betűt attól függően, hogy az összefüggés a dolomit, illetve mészkő (kalcit) oldódására vonatkozik.

#### 4. A dolomit karsztosodásának matematikai vizsgálata

Első lépésként a lefelé eltolódó két tartományból álló ideális törmelékes oldódási zónát vizsgáljuk meg. Tegyük fel, hogy az oldódási zónában egymás alatt  $n+m$  számú horizontális rétegben helyezkednek el a törmelékgömbök. Az alsó  $n$  rétegben a kalcit bevonatos törmelékgömbök, a felső  $m$  ré-

tegen pedig a dolomit törmelékgömbök találhatóak. Mivel az egyes gömböket körülvevő kockák élhosszúsága  $a$ , így a törmelékes zóna  $d$  vastagsága kifejezhető a

$$(7) \quad d = (n + m) \cdot a = n \cdot a + m \cdot a = d_C + d_D$$

összefüggéssel.

A folyamatos karsztos oldás hatására a törmelékes oldódási zóna egyenletes sebességgel süllyed lefelé, de az egyszerűbb matematikai tárgyalás kedvéért feltételezzük a zóna szakaszos süllyedését olyan módon, hogy a szakaszos mozgás átlagsebességét kiszámolva az megegyezzen a folyamatos süllyedés sebességével. Úgy tekintjük tehát, hogy a teljes törmelékes oldódási zóna  $\Delta t$  ideig megtartja térbeli helyzetét, miközben folyik a karsztos oldás, majd ezt követően hirtelen eltolódik lefelé a teljes zóna az egyes törmelékgömböket körülvevő kockák  $a$  élhosszával. Ezután az új térbeli helyzetben egy  $\Delta t$  ideig tartó oldási szakasz, majd ezt követően egy  $a$  nagyságú lefelé történő hirtelen eltolódás, egy lezökkenés következik be, stb. Ezen digitalizált mozgás átlagos sebessége a fenti összefüggések alapján a teljes oldódási zónára

$$(8) \quad c_t = \frac{a}{\Delta t} = \frac{(n + m) \cdot a}{(n + m) \cdot \Delta t} = \frac{d}{(n + m) \cdot \Delta t} ,$$

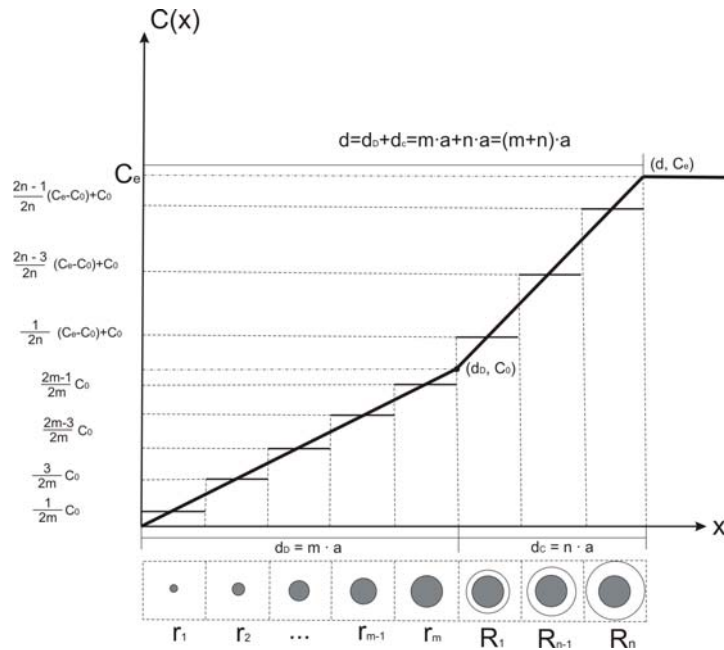
vagy az alsó kalcit bevonatos rétegekre

$$(9) \quad c_t = \frac{a}{\Delta t} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \Delta t} = \frac{d_C}{n \cdot \Delta t} ,$$

illetve a felső dolomit rétegekre pedig a

$$(10) \quad C_t = \frac{a}{\Delta t} = \frac{m \cdot a}{m \cdot \Delta t} = \frac{d_D}{m \cdot \Delta t}$$

összefüggéssel jellemezhető. A törmelékes oldódási zóna süllyedését a (8)-(10) összefüggések annál pontosabban közelítik meg, minél kisebb a törmelékgömbök  $a$  átmérője a zóna  $d$  vastagságához képest.



2. ábra: A  $C=C(x)$  függvény megközelítése lépcsős függvénnyel  
 Fig. 2: Approximation of the  $C=C(x)$  by step function

Az ideális törmelékes oldódási zóna felső széléhez rögzített, s azzal együtt lefelé eltolódó koordinátarendszerben az (1) összefüggésben rögzített alakú  $C(x)$  függvényt a fentiekben bemutatott szakaszos eltolódás alapján a

$$(11) \quad C(x) := \begin{cases} \frac{2k-1}{2m} \cdot C_0, & \text{ha } (k-1)a \leq x < k \cdot a, \quad 1 \leq k \leq m \\ \frac{2l-1}{2n} \cdot (C_e - C_0) + C_0, & \text{ha } (l-1) \cdot a + d_D \leq x \leq l \cdot a + d_D, \quad 1 \leq l \leq n \end{cases}$$

alakú lépcsős függvény felhasználásával írhatjuk le (2. ábra).

## 5. Egy törmelégömb feloldódási folyamata

### 5.1. A mészkőhéj tartományának oldódása

Vizsgáljuk meg ezután egy kalcitbevonatos törmelégömb teljes feloldódási folyamatát!



Tegyük fel, hogy elemzésünk kezdetén éri el éppen a felülről érkező szakaszosan lefelé mozgó ideális törmelékoldódási zóna a kiválasztott törmelégömböt. Így az első  $\Delta t$  időtartamú oldási szakaszban az említett törmelégömb a zóna legalsó, kalcitbevonatos dolomit gömböket tartalmazó rétegében helyezkedik el. Itt az oldószer  $C$  koncentrációja a (11) összefüggés alsó sorából az  $l = n$  helyettesítéssel

$$(12) \quad C(x) = \frac{2n-1}{2n}(C_e - C_0) + C_0$$

értékűnek adódik. Így a (6) egyenlet

$$(13) \quad \frac{dt}{dR} = - \left( \frac{1}{k_{KC}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_C^2 v_C}} \right) \cdot \frac{\rho_C}{C_e - \left[ \frac{2n-1}{2n}(C_e - C_0) + C_0 \right]}$$

formájú, amelynek rendezésével a

$$(14) \quad dt = - \left( \frac{1}{k_{KC}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_C^2 v_C}} \right) \cdot \frac{\rho_C}{\frac{1}{2n} \cdot (C_e - C_0)} dR$$

alak adódik. Integráljuk a (14) összefüggést a  $\Delta t$  időtartamú oldási szakaszra, ennek eredményeként a

$$(15) \quad \int_0^{\Delta t} dt = - \frac{\rho_C}{\frac{1}{2n}(C_e - C_0)} \cdot \int_{R_n}^{R_{n-1}} \left( \frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_C^2 v_C}} \right) dR$$

formula, illetve a

$$(16) \quad [t]_0^{\Delta t} = - \frac{\rho_C}{\frac{1}{2n} \cdot (C_e - C_0)} \left[ \frac{R}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2}{\sqrt[3]{D_C^2 v_C}} \right]_{R_n}^{R_{n-1}}$$

összefüggés nyerhető, amely a rendezések és összevonások elvégzése után a

$$(17) \quad \frac{1}{2n} \frac{C_e - C_0}{\rho_C} \cdot \Delta t = \frac{R_n - R_{n-1}}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}}$$

alakra hozható.

Ezen  $\Delta t$  időtartamú oldási szakasz után az ideális törmelékes oldó-  
dási zóna lezökken  $a$  értékkel mélyebb szintre, ezért tekintett törmelégöm-  
bünk a zóna alulról számított második rétegébe kerül, bár térbeli helyzete  
nem változott. Itt a zóna felső széléhez viszonyított kisebb mélységben lé-  
vén némileg agresszívebb oldószer oldja a törmelégömb kalcitos felületét.  
Ebben a helyzetben az oldószer  $C$  koncentrációja ismét a (11) összefüggés  
alsó sora alapján az  $l = n - 1$  helyettesítéssel nyerhető:

$$(18) \quad C(x) = \frac{2n-3}{2n} (C_e - C_0) + C_0 .$$

Ekkor a (6) egyenlet alakja

$$(19) \quad \frac{dt}{dR} = - \left( \frac{1}{k_{KC}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right) \cdot \frac{\rho_C}{C_e - \left[ \frac{2n-3}{2n} \cdot (C_e - C_0) + C_0 \right]} ,$$

amelyből az első lépésnél látott módszerrel nyerhetjük a (17) formulának  
megfelelő

$$(20) \quad \frac{3}{2n} \cdot \frac{C_e - C_0}{\rho_C} \cdot \Delta t = \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_{n-1}^2 - R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}}$$

összefüggést a második oldási szakasz végére.

Megkezdett eljárásunkat tovább folytatva a kiszemelt törmelégöm-  
bön szakaszosan halad keresztül az ideális törmelékes zóna alsó tartománya.  
Az  $n$ -edik utolsó lépésben a törmelégömb a zóna alsó tartományának felső  
szintjébe kerül, s ekkor oldódik le a gömb felületéről a kalcitbevonat  
legbelső rétege. Itt az oldószer  $C$  koncentrációját a (11) összefüggés alsó  
sorának felhasználásával az  $l = 1$  helyettesítéssel nyerhetjük:

$$(21) \quad C(x) = \frac{1}{2n} (C_e - C_0) + C_0 .$$

A (6) egyenlet alakja

$$(22) \quad \frac{dt}{dR} = - \left( \frac{1}{k_{KC}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right) \cdot \frac{\rho_C}{C_e - \left[ \frac{1}{2n} (C_e - C_0) + C_0 \right]},$$

ahonnan az első lépésben részletezett módon a (17) formulának megfelelő

$$(23) \quad \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{C_e - C_0}{\rho_C} \cdot \Delta t = \frac{R_1 - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}}$$

összefüggés vezethető le.

Ezzel leírtuk az ideális törmelékes zóna alsó,  $n$  számú rétegből álló tartományának a kiválasztott törmelékgömbön történő áthaladását, amelynek eredményeként az  $a$  átmérőjű törmelékgömb felületéről  $n$  lépésben a kalcit bevonat teljesen leoldódik.

Összegezzük most a (17), (20), illetve (23) összesen  $n$  számú összefüggését, amely rendezés és összevonások után a következő alakot ölti:

$$(24) \quad \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2n} \cdot \frac{C_e - C_0}{\rho_C} \cdot \Delta t =$$

$$\frac{(R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \dots + (R_1 - R_0)}{k_{KC}} +$$

$$+ \frac{8}{85} \cdot \frac{(R_n^2 - R_{n-1}^2) + (R_{n-1}^2 - R_{n-2}^2) + \dots + (R_1^2 - R_0^2)}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}}$$

A (24) összefüggés bal oldalán szerepel az első  $n$  darab páratlan szám összege, amelynek értéke  $n^2$ . Az összefüggés jobb oldalán mindkét tag számlálójában egy-egy teleszkopikus összeg szerepel, így a (24) az alábbi tömörebb alakra hozható:

$$(25) \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{C_e - C_0}{\rho_C} \cdot \Delta t = \frac{R_n - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_n^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}},$$

a vizsgált törmelékgömbnek a zóna alsó, kalcit bevonatot oldó tartományán történő áthaladásának teljes időtartama (25) felhasználásával:

$$(26) \quad n \cdot \Delta t = \frac{2\rho_C}{C_e - C_0} \cdot \left[ \frac{R_n - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_n^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right].$$

## 5.2. A belső dolomit tartomány oldódása

Az első  $n$  lépésből álló oldási szakasz után a vizsgált törmelékgömb külső kalcitbevonata teljesen leoldódott és az  $(n+1)$ -edik oldási szakaszban már a törmelékes oldódási zóna felső, dolomitot oldó tartományának legalsó rétegében helyezkedik el. Itt az oldószer  $C$  koncentrációja a (11) összefüggés felső sorából a  $k = m$  helyettesítéssel

$$(27) \quad C(x) = \frac{2m-1}{2m} \cdot C_0$$

értékűnek adódik. A (6) egyenlet

$$(28) \quad \frac{dt}{dR} = - \left( \frac{1}{k_{KD}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right) \cdot \frac{\rho_D}{C_e - \frac{2m-1}{2m} C_0}$$

alakú, ennek átrendezésével a

$$(29) \quad dt = - \left( \frac{1}{k_{KD}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right) \cdot \frac{\rho_D}{C_e - \frac{2m-1}{2m} C_0} dR$$

összefüggést nyerhetjük. Integráljuk ezután a (29) összefüggést a  $\Delta t$  időtartamú oldási szakaszra, ennek eredményeként a

$$(30) \quad \int_0^{\Delta t} dt = - \frac{\rho_D}{C_e - \frac{2m-1}{2m} C_0} \int_{r_m}^{r_{m-1}} \left( \frac{1}{k_{KD}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_D^2 \nu_D}} \right) dR$$

formula, továbbá a

$$(31) \quad [t]_0^{\Delta t} = -\frac{\rho_D}{C_e - \frac{2m-1}{2m}C_0} \left[ \frac{R}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \nu_D}} \right]_{r_m}^{r_{m-1}}$$

összefüggés nyerhető, amely a rendezések és összevonások elvégzése után a

$$(32) \quad \frac{C_e - \frac{2m-1}{2m}C_0}{\rho_D} \cdot \Delta t = \frac{r_m - r_{m-1}}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_m^2 - r_{m-1}^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}}$$

alakra hozható.

Eljárásunkat folytatva ezen  $\Delta t$  időtartamú oldási szakasz után az ideális törmelékes oldási zóna lezökken  $a$  értékkel mélyebb szintre, így az általunk vizsgált törmelégömb a zóna dolomitos felső tartományának alulról számított második rétegébe kerül, bár bérbeli helyzetét mindvégig megtartja. Itt a törmelékdarabnak a zóna felső széléhez viszonyított helyzete tovább csökken, ezért az egyre agresszívebb oldószerrel kerül kapcsolatba. Az oldószer  $C$  koncentrációja a (11) összefüggés felső sora alapján a  $k = m - 1$  helyettesítéssel nyerhető:

$$(33) \quad C(x) = \frac{2m-3}{2m} \cdot C_0.$$

Ekkor a (6) egyenlet alakja

$$(34) \quad \frac{dt}{dR} = -\left( \frac{1}{k_{KD}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right) \cdot \frac{\rho_D}{C_e - \frac{2m-3}{2m}C_0},$$

ahonnan az előző lépésnél látott módszerrel nyerhetjük a (32) formulának megfelelő

$$(35) \quad \frac{C_e - \frac{2m-3}{2m}C_0}{\rho_D} \cdot \Delta t = \frac{r_{m-1} - r_{m-2}}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_{m-1}^2 - r_{m-2}^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}}$$

alakra hozható.

Eljárásunkat tovább folytatva a vizsgált törmelékgömbön szakaszosan halad keresztül az ideális törmelékes zóna felső tartománya. Az  $m$ -edik utolsó lépésben a törmelékgömb a zóna legfelső rétegébe kerül, s ez utolsó összesen  $(n+m)$ -edik oldási szakasz végére teljesen feloldódik. Ezen utolsó szakaszban éri a legagresszívabb oldószer, amelynek  $C$  koncentrációját a (11) összefüggés felső sorának felhasználásával a  $k=1$  helyettesítéssel nyerhetjük:

$$(36) \quad C(x) = \frac{1}{2m} \cdot C_0 .$$

Ekkor a (6) egyenlet alakja

$$(37) \quad \frac{dt}{dR} = - \left( \frac{1}{k_{KD}} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot v_D}} \right) \cdot \frac{\rho_D}{C_e - \frac{1}{2m} \cdot C_0} ,$$

amelyből a fentiekben bemutatott eljárással a (32) formulának megfelelő összefüggés a

$$(38) \quad \frac{C_e - \frac{1}{2m} C_0}{\rho_D} \cdot \Delta t = \frac{r_1 - r_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_1^2 - r_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot v_D}}$$

alakban írható fel.

Ezzel leírtuk az ideális törmelékes zóna felső,  $m$  számú rétegből álló tartományának a kiszemelt törmelékgömbön történő áthaladását, amelynek eredményeként a kalcit bevonatától oldással megfosztott dolomit törmelékgömb  $m$  lépésben teljesen feloldódik.

Összegezzük most a (32), (35), illetve (38), összesen  $m$  számú formuláját, amely a rendezés és összevonások után a következő alakot ölti:

$$(39) \quad \frac{\left( C_e - \frac{2m-1}{2m} \cdot C_0 \right) + \left( C_e - \frac{2m-3}{2m} \cdot C_0 \right) + \dots + \left( C_e - \frac{1}{2m} \cdot C_0 \right)}{\rho_D} \cdot \Delta t =$$

$$= \frac{(r_m - r_{m-1}) + (r_{m-1} - r_{m-2}) + \dots + (r_1 - r_0)}{k_{KD}} +$$

$$+ \frac{8}{85} \cdot \frac{(r_m^2 - r_{m-1}^2) + (r_{m-1}^2 - r_{m-2}^2) + \dots + (r_1^2 - r_0^2)}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}}.$$

E formula baloldalán szereplő tört számlálója összevonás és kiemelés után felismerhetően szintén tartalmazza a kalcitos oldási szakasz összegző formulájához hasonlóan az első  $m$  számú páratlan szám összegét, amelynek értéke  $m^2$ . A jobb oldalon pedig mindkét szereplő tagban egy-egy teleszkopikus összeg található. Ezen észrevételek felhasználásával a (39) tömörebb alakra hozható:

$$(40) \quad \frac{m \cdot (2C_e - C_0)}{2\rho_D} \cdot \Delta t = \frac{r_m - r_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_m^2 - r_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}}.$$

A vizsgált törmelékgömbnek a zóna felső, dolomitot oldó tartományán történő áthaladásának teljes időtartama:

$$(41) \quad m \cdot \Delta t = \frac{2\rho_D}{2C_e - C_0} \left[ \frac{r_m - r_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_m^2 - r_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right].$$

### 5.3. Az oldódás időtartama

A szóban forgó törmelékgömbnek az ideális törmelékes oldódási zónán történő áthaladásának, s egyúttal a törmelékgömb teljes feloldódásának időtartama pedig a (26) és (41) összefüggések felhasználásával

$$(42) \quad T = (n + m) \cdot \Delta t = n \cdot \Delta t + m \cdot \Delta t =$$

$$= \frac{2\rho_C}{C_e - C_0} \left[ \frac{R_n - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_n^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right] +$$

$$+ \frac{2\rho_D}{2C_e - C_0} \left[ \frac{r_m - r_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{r_m^2 - r_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right].$$

Vegyük észre azonban, hogy  $R_n = R = \frac{a}{2}$ ,  $r_m = R_0$  és  $r_0 = 0$ , amelyek felhasználásával (42) a

$$(43) \quad T = \frac{2\rho_C}{C_e - C_0} \left[ \frac{R - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right] + \\ + \frac{2\rho_D}{2C_e - C_0} \left[ \frac{R_0}{k_{KD}} + \frac{R_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right]$$

egyszerűbb alakot ölti, az egyes oldási időszakok időtartama pedig (42), illetve (43) alapján:

$$(44) \quad \Delta t = \frac{1}{n+m} \cdot T = \frac{1}{n+m} \left[ \frac{2\rho_C}{C_e - C_0} \left( \frac{R - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\rho_D}{2C_e - C_0} \left( \frac{R_0}{k_{KD}} + \frac{R_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right) \right].$$

## 6. A dolomit denudációs sebességének kiszámítása

Az előző részben bemutatott összefüggések ismeretében már meghatározhatjuk a vizsgált dolomitos karsztos térszín modellünk alapján származtatható denudációs sebességét.

Szemeljük ki az ideális törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges  $n+m$  számú törmelégömböt tartalmazó oszlopát. E gömbök mérete alulról felfelé haladva egyre kisebb. Az alsó  $n$  számú dolomit anyagú gömb kalcit bevonattal rendelkezik és mészkő gömbök módjára oldódik, a felső  $m$  számú pedig dolomit gömb az előző fejezet modelljével összhangban.

Könnyen beláthatjuk, hogy e törmelégömbök sugarainak nagysága rendre megegyezik egy adott törmelégömb teljes feloldódási folyamata egyes fázisaiban mérhető, az előző részben kiszámított sugaraival, miközben e gömbön áthalad az ideális törmelékes oldódási zóna. E sugarak értéke az oszlopban lentől felfelé haladva egy  $\Delta t$  időtartamú oldási szakasz kez-



detén  $R_n = \frac{a}{2}, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_2, R_1, r_m, r_{m-1}, \dots, r_2, r_1$ , az oldási szakasz végén pedig rendre  $R_{n-1}, R_{n-2}, R_{n-3}, \dots, R_1, R_0, r_{m-1}, r_{m-2}, \dots, r_1, r_0 = 0$ . E gömbök térfogatai pedig az oldódási szakasz kezdetén:

$V_n = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3, V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_2, V_1, v_m, v_{m-1}, \dots, v_2, v_1$ , az oldódási szakasz végén rendre  $V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_1, V_0, v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_1, v_0 = 0$ .

A  $\Delta t$  oldási időtartam alatt e gömboszlopból kioldott eltűnő térfogat nagysága:

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \Delta V &= (V_n - V_{n-1}) + (V_{n-1} - V_{n-2}) + \dots + (V_2 - V_1) + (V_1 - V_0) + \\
 &\quad + (v_m - v_{m-1}) + (v_{m-1} - v_{m-2}) + \dots + (v_2 - v_1) + (v_1 - v_0) = \\
 &= V_n - v_0 = V_n = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot a^3,
 \end{aligned}$$

hiszen (45) a (24) és (39) összefüggésekhez hasonlóan szintén egy teleszkopikus összeget tartalmaz.

Ha  $\Delta x$  jelöli a dolomitos karsztos térszín lesüllyedését a  $\Delta t$  idő alatt, akkor érvényes a

$$(46) \quad \Delta V = a^2 \cdot \Delta x$$

összefüggés is, amelyet (45) összefüggéssel egybevetve nyerjük a

$$(47) \quad \frac{\pi}{6} \cdot a^3 = a^2 \cdot \Delta x,$$

vagyis a

$$(48) \quad \Delta x = \frac{\pi}{6} \cdot a$$

összefüggést. A kalciteres dolomitos térszín denudációs sebességét már egyszerűen meghatározhatjuk a (44) és (48) felhasználásával a

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot a}{\frac{1}{n+m} \left[ \frac{2\rho_C}{C_e - C_0} \left( \frac{R - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right) + \frac{2\rho_D}{2C_e - C_0} \cdot \left( \frac{R_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right) \right]} =$$

(49)

$$= \frac{\frac{\pi}{12} d}{\frac{\rho_C}{C_e - C_0} \left( \frac{\frac{a}{2} - R_0}{k_{KC}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right) + \frac{\rho_D}{2C_e - C_0} \cdot \left( \frac{R_0}{k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_0^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right)}$$

formában.

Figyeljük meg, hogy ha speciálisan modellünkben a kalcit bevonattal ellátott dolomitgömbök oldódásakor a belső dolomitgömb sugara 0, azaz tiszta mészkögömbök rendszere oldódik, akkor a denudáció sebessége (49) alapján

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{12} \cdot d_C}{\frac{\rho_C}{C_e} \left( \frac{a}{2k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right)} =$$

(50)

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{C_e \cdot d_C}{\rho_C} \cdot \left( \frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D_C^2 \cdot \nu_C}} \right)^{-1},$$

hiszen ekkor  $d = d_C$ ,  $C_0 = R_0 = 0$ . Ez teljes egyezést mutat PÉNTEK (2001) dolgozata (30) végformulájával.

Vegyük észre továbbá, hogy ha a kalcit bevonattal ellátott dolomitgömbök oldásakor bevonat vastagsága 0, azaz tiszta dolomitgömbök rendszere oldódik, akkor a denudáció sebessége (49) alapján

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{12} \cdot d_D}{\frac{\rho_D}{C_e} \left( \frac{a}{2k_{KD}} + \frac{8}{85} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right)} =$$

(51)

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{C_e \cdot d_D}{\rho_D} \cdot \left( \frac{a}{2k_{KD}} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D_D^2 \cdot \nu_D}} \right)^{-1},$$

mivel ekkor  $d = d_D$ ,  $C_0 = C_e$ ,  $R_0 = \frac{a}{2}$ .

Láthatjuk tehát, hogy modellünk a mészkő karsztos denudációs modellje természetes kiterjesztésének tekinthető.

## 7. Összegzés

A dolgozatban egy olyan matematikai modellt mutattunk be, amelynek felhasználásával viszonylag kevés paraméter ismeretében kiszámíthatjuk egy kalciterekkel átszótt dolomitos térszín karsztos denudációs sebességét.

Így ismernünk kell a törmelékes oldódási zóna  $d$  vastagságát, az egyes törmelékdarabok átlagos  $a$  nagyságát. Szükséges továbbá az adott oldási körülmények között az oldószer  $C_e$  telítési koncentrációját, illetve kalcit és a dolomit arányával kapcsolatban levő  $C_0$  koncentráció és  $R_0$  sugár értékeket. Ismernünk kell a mészkő  $\rho_C$ , valamint a dolomit  $\rho_D$  sűrűségét, továbbá az áramló oldószer mészkő, valamint dolomit oldásakor mérhető  $D_C$ , illetve  $D_D$  diffúziós állandóját,  $\nu_C$ , illetve  $\nu_D$  kinematikai viszkozitását. Ez utóbbi két-két paramétert az Arrhenius egyenletekből számíthatjuk ki a *PÉNTEK-VERESS* (2002), illetve a *PÉNTEK* (2008) dolgozatokban részletezett módon. Ezen mennyiségek meghatározása laboratóriumi mérésekkel lehetséges.

A dolomit denudációját szabályozó fizikai-kémiai folyamatok paramétereinek megmérése, kiszámítása, valamint a tényleges denudációs sebesség előállítása és a (49) képlet alapján történő numerikus meghatározása munkánk soron következő fontos feladata.

## IRODALOM

- DUBLJANSZKIJ, J.V.* (1987): Teoreticeszkoje modelirovanije dinamiki formirovanija gidrotermokarsztovüh polosztyej – Metodi i izucsenyija geologiczeszkih javlenij, Novoszibirszk p. 97-111.
- IZÁPY G. – MAUCHA L.* (2000): A magyarországi karsztos denudáció sebességének becslése – Karsztfejlődés V., BDF. Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 7-20.
- JAKUCS L.* (1971): A karsztok morfogenetikája – Akadémiai Kiadó, Budapest
- NERNST, W.* (1904): Theorie der Reaktionsgeschwindigkeiten in heterogenen Systemen II. – Zeitschrift für Physikalische Chemie. 47. p. 52-55
- PÉNTEK K.* (2001): Karsztosodó mészkő térszínének lepusztulásának matematikai modellje – Karsztfejlődés VI., BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 13-25.
- PÉNTEK K.* (2007): A horizontális karsztosodás egyenletrendszerének levezetése elemi tárgyalással – Karsztfejlődés XII., BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 53-70.
- PÉNTEK K.* (2008): A horizontális karsztosodás egyenletrendszerének egy egyszerű megoldása – Karsztfejlődés XIII., NYME Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 5-22.
- PÉNTEK K. – VERESS M.* (2002): A karsztos lepusztulás sebességének kiszámítása egy törmelékes oldódási zóna adatainak felhasználásával – Karsztfejlődés VII., BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 73-86.
- VERESS M.* (1998): Általános természeti földrajz – Savaria University Press, Szombathely
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1990): Kísérlet a karsztos felszínnek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1994): Néhány karsztos folyamat leírása a fizikai – kémiai hidrodinamika alapján – BDTF Tudományos Közleményei IX. Természetudományok IV. Szombathely, p. 19-42.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1995): Kísérlet a felszíni vertikális karsztosodás kvantitatív leírására – Földrajzi Értesítő XLIV. 3-4. p. 157-177.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1998): Modelling of karst surface evolution: Quantitative description of surface vertical karstification – Windows on Hungarian Geography, Studies in Geography in Hungary 28. Geographical Research Inst. HAS, Budapest, p. 53-69.