KARSZTFEJLŐDÉS XIII.
Szombathely, 2008. pp. 5-22.

A HORIZONTÁLIS KARSZTOSODÁS EGYENLET-RENDSZERÉNEK EGY EGYSZERŰ MEGOLDÁSA

PÉNTEK KÁLMÁN

Nyugat-magyarországi Egyetem, Természettudományi és Műszaki Kar,
Matematika és Fizikai Intézet 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.
pentek@ttmk.nyme.hu

Abstract: This paper presents an elementary solution of equation system of horizontal karstification process.

1. Bevezetés

A horizontális karsztosodás folyamatának geomorfológiai modellje és annak első matematikai leírása *VERESS-PÉNTEK* (1990, 1996) munkáiban szerepel.

E törmelékes oldódási zónát képező karsztos denudációs folyamat egy némileg más geomorfológiai modelljének kidolgozását és matematikai tárgyalását *SZUNYOGH* (1994) végezte el.

Az elsőként felépített matematikai modell finomítását és továbbfejlesztését *PÉNTEK* (2001) és *PÉNTEK-VERESS* (2002) készítette el.

A horizontális karsztosodás *SZUNYOGH* (1994) által megadott matematikai modellje a parciális differenciálegyenletek elméletének felhasználásával írja le a denudáció folyamatát. Ezen felsőbb matematikai eszközök alkalmazását helyettesítő elemi felépítésben tárgyalja a törmelékes zónát eredményező karsztosodási folyamatot *PÉNTEK* (2007) dolgozata.

Ez a dolgozat a szerző ezen utóbbi munkája szerves folytatásának tekinthető, amelyben bemutatásra kerül a karsztos oldás általános egyenletrendszerének egy rövid és egyszerű megoldása. Az alkalmazott fogalmak és jelölések teljes összhangban vannak a szóban forgó dolgozat tárgyalásával.

2. A karsztos oldás egyenletrendszere

A törmelékes oldódási zónát képező karsztos oldás általános egyenletrendszerének alakja

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
& v \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} = 0 \\
& \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} \\
& -\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{C_e - C}{\rho_{kő}} \cdot \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}} \right)^{-1} ,
\end{aligned}
$$

a $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$ határátmenetet képezve jutunk a

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
& v \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \\
& -\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{C_e - C}{\rho_{kő}} \cdot \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}} \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

formájú egyenletrendszerhez. A karsztos oldás ezen egyenletrendszerében szereplő mennyiségek jelentése a következő:

v = a lefelé szivárgó oldószer áramlási sebessége,
C = az oldószernek a törmelékes zóna adott pontjában és időpillanatban mérhető $CaCO_3$ koncentrációja,
x = a törmelékes oldódási zóna kezdő időpontban mért felső peremétől mért távolság,
κ = a törmelékes oldódási zónát alkotó törmelékgömbök hézagtérfogata,
$\rho_{kő}$ = a $CaCO_3$ sűrűsége,
w = a lefelé mozgó törmelékgömböknek a törmelékes zóna adott pontjában és időpillanatban mérhető süllyedési sebessége,
R = a törmelékgömböknek a törmelékes zóna adott pontjában és időpillanatban mérhető sugara,
t = az oldási folyamat kezdő időpontja óta eltelt idő,
C_e = az oldószer oldási rendszerre jellemző egyensúlyi telítési $CaCO_3$ koncentrációja,

k_K = a $CaCO_3$ kémiai oldódásának sebességi állandója,
D = az oldási rendszer diffúziós állandója,
ν = az oldási rendszer kinematikai viszkozitási tényezője.

Az (1), illetve (2) egyenletrendszerben a v, κ, $\rho_{kő}$, C_e, k_K, D és ν mennyiségek értéke ismert, vagy ismert értékekből a gyakorlati számításokat bemutató részben közölt módon meghatározható. Ezért e mennyiségeket egyenletrendszerünk megoldása szempontjából ismerteknek tekintjük.

Feladatunk a (2) egyenletrendszerben szereplő $C = C(x,t)$, $R = R(x,t)$ és $w = w(x,t)$ függvények meghatározása. Egyenletrendszerünk olyan megoldását keressük, amely eleget tesz a következő kezdeti, illetve peremfeltételeknek:

a. Ha $0 \le x < \infty$ és $t = 0$, akkor $R = R_0$, $C = 0$ és $w = 0$, hiszen a kezdeti időpillanatban még nincs oldás, csupán elindul felülről lefelé a beszivárgó oldószer.

b. Ha $x \to \infty$ és $t > 0$, akkor $R = R_0$, $C = C_e$ és $w = 0$, mert a kőzet felszíne alatt nagy mélységben a beszivárgó oldószer már telített.

c. Ha $x = 0$ és $t > 0$, akkor $C = 0$, miután a törmelékes zóna felszínén a beszivárgó oldószer még nem tartalmaz oldott $CaCO_3$ anyagot.

3. A karsztos oldás egyenletrendszerének néhány következménye

Induljunk ki a (2) egyenletrendszer első egyenletéből és szorozzuk meg a κ hézagtérfogattal:

$$\kappa \cdot v \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ . \tag{3}$$

Mivel κ, v és $\rho_{kő}$ értéke állandó, így (3) a differenciálszámítás elemi szabályai szerint a

$$\frac{\partial \left[\kappa \cdot v \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w \right]}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

alakra hozható. Vegyük észre, hogy a (4) szögletes zárójelben szereplő kifejezése a f teljes tömegáramsűrűség, amelynek első tagja a folyadék fázisban áramló $CaCO_3$ tömegét, a második tagja a törmelékgömbök süllyedéséből származó szilárd fázisban áramló $CaCO_3$ tömegét jelenti (*SZUNYOGH* 1994, *PÉNTEK* 2007).

Az f teljes tömegáramsűrűség x változó szerinti parciális deriváltja a (4) szerint eltűnik, így e mennyiség az x változótól független, értéke legfeljebb a t időtől függhet:

(5) $$\kappa \cdot v \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w = A(t),$$

vagy részletesebben

(6) $$\kappa \cdot v \cdot C(x,t) + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w(x,t) = A(t).$$

A (2) egyenletrendszer kezdeti, illetve peremfeltételeinek b) pontja szerint $x \to \infty$ és $t > 0$ esetén $C = C_e$ és $w = 0$, amely alapján (6) felhasználásával ez $A(t)$ függvényre

(7) $$\kappa \cdot v \cdot C_e + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot 0 = A(t)$$

teljesül. Így

(8) $$A(t) = \kappa \cdot v \cdot C_e,$$

amelynek alapján az (5) összefüggés az

(9) $$f = \kappa \cdot v \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w = \kappa \cdot v \cdot C_e \ (= konstans)$$

alakot ölti. Az így nyert (9) egyenlőség a tömegáramsűrűség állandóságának törvényét mondja ki.
A törmelékes oldódási zóna oldás hatására lefelé eltolódó, elvileg végtelen mélységig terjeszkedő teljes tartományának minden pontjában a $CaCO_3$ teljes f tömegáramsűrűsége a karsztos oldási rendszerre jellemző állandó mennyiség.

A tömegáramsűrűség imént felismert állandóságához az alábbi megjegyzéseket fűzzük.

A teljes tömegáramsűrűség a (9) összefüggésben is szereplő kéttagú összeg. Első tagja az oldott állapotú $CaCO_3$ áramlását, második tagja a szilárd halmazállapotú törmelékgömbök lefelé süllyedő áramlását írja le. A fenti törvény e két tag összegének állandóságát rögzíti, viszont nyilvánvaló, hogy az összeadandók mindegyike változik a teljes törmelékes zónában.

A törmelékes zóna felső részén még alig van oldott állapotú $CaCO_3$, ezért az összeg első tagja kicsi, ugyanakkor a második tag nagy, hiszen az egyes törmelékgömbök lefelé történő eltolódása az alattuk levő rétegek oldódása miatt itt a legnagyobb.

Ahogyan haladunk lefelé a törmelékes zónában, az oldószer egyre telítettebb lesz, az összeg első tagja tehát növekszik. A telítődés felé közelítő oldószer már egyre kevesebbet old le a törmelékgömbök felszínéről, ezáltal azok lefelé történő eltolódása egyre kisebb mértékű lesz, vagyis az összeg második tagja csökken.

Látható tehát, hogy a teljes tömegáramsűrűség első tagja a törmelékes zónában lefelé haladva egyre nő, második tagja pedig ezzel szinkronban úgy csökken, hogy összegük mindig állandó maradjon.

Ezután a (9) összefüggésből két további megállapítást vezetünk le. Osszuk végig a (9) egyenlőségét a $\kappa \cdot v$ mennyiséggel, így a

$$C + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\rho_{kő}}{v} \cdot w = C_e \tag{10}$$

összefüggéshez jutunk, amelynek egyszerű átrendezésével a

$$C = C_e - \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\rho_{kő}}{v} \cdot w\,, \tag{11}$$

vagy részletesebben a

$$C(x,t) = C_e - \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\rho_{kő}}{v} \cdot w(x,t) \tag{12}$$

összefüggés adódik. Láthatjuk, hogy (12) kapcsolatot teremt a törmelékgömbök w süllyedési sebessége, valamint a karsztos oldat pillanatnyi C $CaCO_3$ koncentrációja között.

A (2) egyenletrendszer kezdeti, illetve peremfeltételeinek c. pontja szerint $x = 0$ és $t > 0$ esetén $C = 0$. Jelölje w_0 a törmelékes zóna felső széléhez tartozó törmelékgömbök süllyedési sebességét! Ekkor elvégezve a (11) egyenletben a $C = 0$ és $w = w_0$ helyettesítést a

$$0 = C_e - \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\rho_{kő}}{v} \cdot w_0 \tag{13}$$

összefüggést nyerjük, amelynek átrendezésével

$$w_0 = \frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{v}{\rho_{kő}} \cdot C_e \tag{14}$$

adódik *SZUNYOGH* (1994) eredményével összhangban.
Az így nyert (14) egyenlőség a karsztos térszín állandó sebességű süllyedésének törvényét mondja ki.
A törmelékes oldódási zóna felső határa, s ezzel együtt a karsztos felszín is adott karsztosodási feltételek mellett időben állandó nagyságú sebességgel süllyed.

A karsztos térszín a fentiek szerint az oldás hatására egyenletes sebességgel (vagyis sem nem gyorsulva, sem nem lassulva) süllyed. Ha a karsztosodás körülményei nem változnak, akkor a rendszerre jellemző, bár horizontálisan esetleg pontról pontra változó, de az adott helyen állandó süllyedési sebességgel kell számolnunk.

Ha azonban megváltoznak a karsztosodás körülményei, akkor a megváltozott viszonyoknak megfelelő, de szintén állandó sebességű süllyedési folyamat alakul ki.

4. A karsztos oldás egyenletrendszerének megoldása

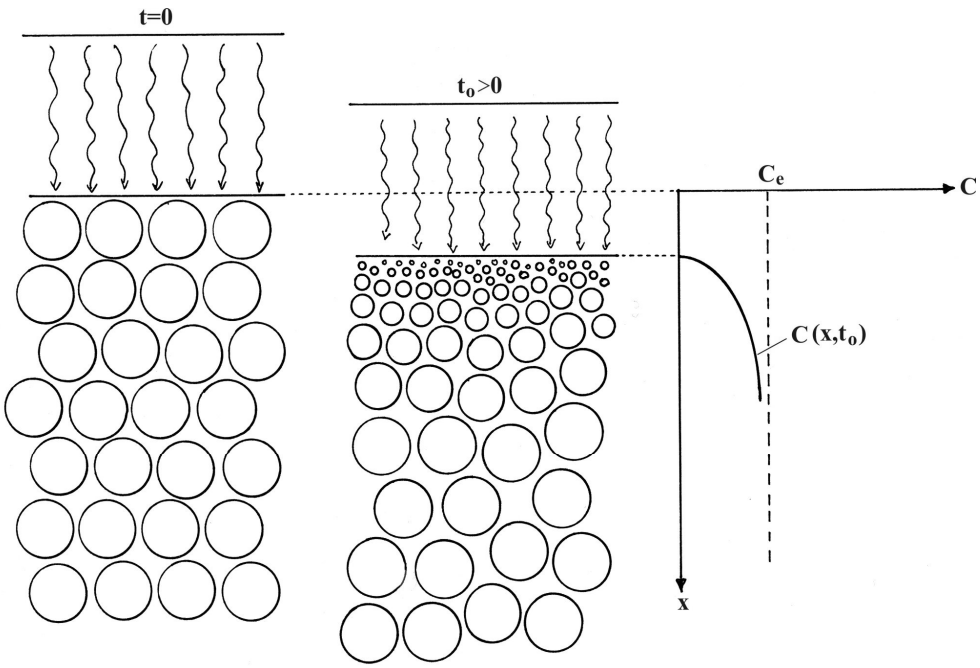
Az előző részekben megszerzett ismeretek birtokában rátérünk a karsztos oldás általános egyenletrendszerének megoldására. Keressük tehát a (2) egyenletrendszert kielégítő azon $C(x,t)$, $R(x,t)$ és $w(x,t)$ folytonos függvényeket, amelyek a törmelékes zóna kezdő időpontban elfoglalt felső peremétől mért x mélységben és t időpontban megadják rendre a lefelé szivárgó oldat pillanatnyi $CaCO_3$ koncentrációját, a törmelékgömbök sugarát és a törmelékgömbök süllyedésének sebességét.

A (14) összefüggésben megállapítottuk, hogy a törmelékes oldódási zóna felső határa egyenletes w_0 sebességgel süllyed. A törmelékes zóna felső peremén az oldószer még teljesen telítetlen. Ahogyan lefelé haladunk, a felülről érkező karsztos oldószer az x mélységgel nagyjából megegyező oldási út megtétele után egyre inkább telítődik. A (2) egyenletrendszer kezdeti, illetve peremfeltételeinek b. pontja szerint $x \to \infty$ és $t > 0$ esetén $C = C_e$, vagyis igen nagy mélységben az oldószer gyakorlatilag teljesen telítődik.

Ezek alapján keressük a lefelé szivárgó oldószer $C(x,t)$ pillanatnyi $CaCO_3$ koncentrációjának szigorúan monoton növekedő, folytonos függvényét

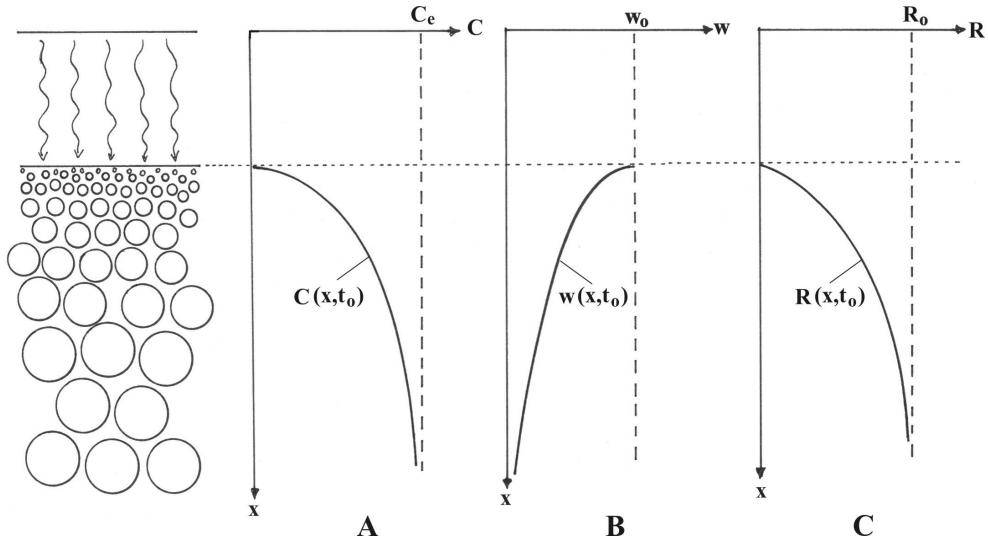
(15) $$\boxed{C(x,t) = C_e \cdot \left(1 - e^{-\lambda(x - w_0 t)}\right) \quad x \geq w_0 t}$$

alakban, ahol λ egy egyelőre még meghatározásra váró, az exponenciális telítődés ütemét megszabó pozitív állandó (*1. ábra, 2.a. ábra*).



1. ábra: A $C(x,t)$ *függvény a* t_0 *időpontban*

Fig. 1 The function $C(x,t)$ *at point of time* t_0



2. ábra: A $C(x,t)$, $w(x,t)$ és $R(x,t)$ *függvények a* t_0 *időpontban*

Fig. 2 The functions $C(x,t)$, $w(x,t)$ and $R(x,t)$ *at point of time* t_0

Láthatjuk, hogy (15) egy olyan exponenciálisan telítődő aperiodikus hullámfüggvény, amely w_0 sebességgel tolódik el lefelé, kísérve az ezen sebességgel süllyedő törmelékes oldódási zónát.

Helyettesítsük ezután a (15) alakú $C(x,t)$ függvényt a (12) egyenletbe. Ekkor

$$C_e \cdot \left(1 - e^{-\lambda(x - w_0 t)}\right) = C_e - \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{\rho_{kő}}{v} \cdot w(x,t) \tag{16}$$

adódik, ahonnan a kijelölt műveletek elvégzése, összevonások és (14) összefüggés felhasználásával a

$$\boxed{w(x,t) = w_0 \cdot e^{-\lambda(x - w_0 t)} \qquad x \geq w_0 t} \tag{17}$$

összefüggést nyerjük (*2.b. ábra*).

Láthatjuk, hogy $w(x,t)$ függvény a $C(x,t)$ függvényhez hasonlóan egy w_0 sebességgel lefelé eltolódó, exponenciálisan lecsengő aperiodikus hullámfüggvény. Amíg azonban a $C(x,t)$ függvény a (15) alapján a tapasztalattal összhangban lefelé nő és tart az egyensúlyi koncentráció C_e értéké-

hez, addig a $w(x,t)$ függvény a (17) alapján lefelé haladva csökken és exponenciálisan 0-hoz tart.

Készítsük el ezután a (17) függvény x változó szerinti

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\lambda \cdot w_0 \cdot e^{-\lambda(x - w_0 t)} \tag{18}$$

parciális deriváltját, s helyettesítsük a karsztos oldás (2) alakú általános egyenletrendszerének második egyenletébe. Ekkor a

$$-\lambda \cdot w_0 \cdot e^{-\lambda(x - w_0 t)} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \tag{19}$$

összefüggést kapjuk.

Mivel $w(x,t)$ és $R(x,t)$ folytonos függvények, ezért a (19) egyenlőség két oldalán álló függvények azonos határok között tekintett határozott integráljai is megegyeznek. Integráljuk ezért a (19) mindkét oldalát idő szerint a $[0,t]$ határok között:

$$-\lambda w_0 \int_0^t e^{-\lambda(x - w_0 \tau)} d\tau = \int_0^t \frac{3}{R(x,\tau)} \cdot \frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau \ , \tag{20}$$

amelyből

$$-\lambda w_0 \cdot e^{-\lambda x} \int_0^t e^{\lambda w_0 \tau} d\tau = 3 \int_0^t \frac{1}{R(x,\tau)} \cdot \frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau \tag{21}$$

következik. Az integrálás eredményeként

$$-\lambda w_0 \cdot e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{\lambda w_0 \tau}}{\lambda w_0} \right]_0^t = 3 \left[\ln R(x,\tau) \right]_0^t \tag{22}$$

adódik. A (2) egyenletrendszer kezdeti, illetve peremfeltételeinek a) pontja alapján ha $\tau = 0$, akkor $R(x,\tau) = R_0$ tetszőleges $0 \le x < \infty$ mélységben, ezért a (22) összefüggésből egyszerűsítés és összevonás után

(23) $$-\left[e^{-\lambda(x-w_0t)}-e^{-\lambda x}\right]=3\left[\ln R(x,t)-\ln R_0\right]$$

adódik, amelynek átrendezésével

(24) $$\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda(x-w_0t)}}{3}=\ln\frac{R(x,t)}{R_0}\ ,$$

amelyből e alapra történő emeléssel

(25) $$e^{\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda(x-w_0t)}}{3}}=e^{\ln\frac{R(x,t)}{R_0}}=\frac{R(x,t)}{R_0}$$

következik, innen pedig már közvetlenül nyerjük az

(26) $$\boxed{R(x,t)=R_0\cdot e^{\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda(x-w_0t)}}{3}}\qquad x\geq x_0t}$$

összefüggést (*2.c. ábra*).
Figyeljük meg, hogy a folyamat kezdetén tetszőleges mélységben a (26) alapján

(27) $$R(x,0)=R_0\cdot e^{\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}\cdot e^{\lambda w_0 0}}{3}}=R_0\cdot e^{\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}}{3}}=R_0\cdot e^0=R_0\ ,$$

ha $t=0$, tehát valamennyi törmelékgömb azonos, R_0 sugarú.

Ezután a (15), (17) és (26) függvényekben szereplő $\lambda>0$ paraméter meghatározásával foglalkozunk.

Tekintsük ezért a karsztos oldás (2) egyenletrendszerének harmadik egyenletét, s annak egyszerű átrendezésével fejezzük ki a $C(x,t)$ függvényt. Így

(28) $$C(x,t)=C_e+\rho_{kő}\left(\frac{1}{k_K}+\frac{16}{85}\cdot\frac{R}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right)\cdot\frac{\partial R}{\partial t}$$

adódik, amelynek bal oldalába helyettesítsük be $C(x,t)$ (15) összefüggésben szereplő alakját:

$$(29) \qquad C_e \cdot \left(1 - e^{-\lambda(x - w_0 t)}\right) = C_e + \rho_{kő} \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \ ,$$

amelyből beszorzás és összevonás után

$$(30) \qquad -C_e \cdot e^{-\lambda(x - w_0 t)} = \rho_{kő} \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial t}$$

következik.

A $C(x,t)$ és $R(x,t)$ folytonos függvények, így a (30) mindkét oldalán álló függvény azonos határok között tekintett határozott integráljai is egyenlőek. Integráljuk tehát a (30) mindkét oldalát idő szerint a $[0,t]$ határok között:

$$(31) \qquad -C_e \int_0^t e^{-\lambda(x - w_0 \tau)} d\tau = \rho_{kő} \cdot \int_0^t \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R(x,\tau)}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau \ ,$$

ahonnan

$$(32) \qquad -C_e \cdot e^{-\lambda x} \int_0^t e^{\lambda w_0 \tau} d\tau = \rho_{kő} \int_0^t \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R(x,\tau)}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

adódik. Az integrálás elvégzése után

$$(33) \qquad -C_e \cdot e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{\lambda w_0 \tau}}{\lambda w_0} \right]_0^t = \rho_{kő} \left[\frac{R(x,\tau)}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R^2(x,\tau)}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right]_0^t$$

következik. A (2) egyenletrendszer kezdeti, illetve peremfeltételeinek a) pontját felhasználva ha $\tau = 0$, akkor $R(x,\tau) = R_0$ tetszőleges $0 \le x < \infty$ értéke mellett, így a (33) összefüggésből összevonások után

$$(34) \qquad -\frac{C_e}{\lambda w_0}\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]=\rho_{kő}\left[\frac{R-R_0}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R^2-R_0^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right]$$

adódik.

A gyakorlati számítások tapasztalatai szerint a (34) egyenlőség jobb oldalán a szögletes zárójel első tagja több nagyságrenddel kisebb a másodiknál, így a további munka egyszerűsítése érdekében ezen első tagot elhanyagoljuk.

Ezután R^2 értékét már könnyen kifejezhetjük az

$$(35) \qquad R^2=R_0^2-\frac{85}{8}\cdot\frac{C_e\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}{\rho_{kő}\cdot\lambda\cdot w_0}\cdot\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]$$

formában.

Helyettesítsük most a (35) jobb oldalán álló kifejezést a (23) összefüggés egyszerű átalakításával nyert

$$(36) \qquad -\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]=\frac{3}{2}\cdot\ln\frac{R^2(x,t)}{R_0^2}$$

egyenlőség jobb oldalába! Ezzel a

$$(37) \qquad -\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln\frac{R_0^2-\frac{85}{8}\cdot\frac{C_e\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}{\rho_{kő}\cdot\lambda\cdot w_0}\cdot\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]}{R_0^2}$$

egyenlőséghez, illetve a jobb oldal egyszerű átalakításával a

$$(38) \qquad -\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left[1-\frac{85}{8}\cdot\frac{C_e\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}{\rho_{kő}\cdot\lambda\cdot w_0\cdot R_0^2}\cdot\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)}-e^{-\lambda x}\right]\right]$$

alakhoz jutunk.

Közelítsük a (38) egyenlőség jobb oldalán álló $\ln$ függvényt tartalmazó kifejezést Taylor sorának első tagjával:

$$\ln(1-x) \approx -x \tag{39}$$

(*SZUNYOGH*, 1994), ezzel a (38) egyenlőség az

$$-\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)} - e^{-\lambda x}\right] = \tag{40}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{85}{8}\cdot\frac{C_e\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}{\rho_{kő}\cdot\lambda\cdot w_0\cdot R_0^2}\cdot\left[e^{-\lambda(x-w_0 t)} - e^{-\lambda x}\right]$$

formát ölti.

A $t>0$ esetben a (40) egyenlőség mindkét oldalát végigoszthatjuk a szögletes zárójelben álló pozitív kifejezéssel, majd a kapott összefüggés egyszerű átrendezésével kifejezhetjük a keresett λ paraméter értékét:

$$\boxed{\lambda = \frac{255}{16}\cdot\frac{C_e\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}{\rho_{kő}\cdot w_0\cdot R_0^2}} \tag{41}$$

Láthatjuk, hogy adott törmelékes oldódási zóna esetén a λ paraméter ismert, illetve számítható mennyiségekből épül fel, s értéke pozitív.

5. A karsztos térszín pusztulásának sebessége

Az előző részekben bemutatott számításaink eredményeinek birtokában *SZUNYOGH* (1994) nyomán haladva már meghatározhatjuk a karsztos térszín adott pontjában a denudáció mértékét, a térszín lealacsonyodásának sebességét.

A q felszíni beszivárgás, az oldószer v áramlási sebessége és a κ hézagtérfogat között érvényes a

$$q = \kappa\cdot v \tag{42}$$

összefüggés, hiszen a szivárgó víz csupán a κ hézagtérfogatú törmelékes zóna üregeiben képes mozogni. Ekkor a (14) összefüggés a (42) felhasználásával a

$$w_0 = \frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{\nu}{\rho_{kő}} \cdot C_e = \frac{q}{1-\kappa} \cdot \frac{C_e}{\rho_{kő}} \tag{43}$$

alakra hozható.

A térszín átlagos éves süllyedésének kiszámításához integráljuk idő szerint a (43) összefüggést egy teljes év T időtartalmára. A w_0 ezen időtartamra vonatkozó integrálja a térszín egy éves h teljes süllyedését adja meg:

$$h = \int_0^T \frac{q}{1-\kappa} \cdot \frac{C_e}{\rho_{kő}} dt = \frac{1}{1-\kappa} \cdot \frac{C_e}{\rho_{kő}} \int_0^T q\, dt \ . \tag{44}$$

A (44) jobb oldalán szereplő integrál a vizsgált karsztos térszín adott pontjában lehullott teljes csapadék mennyiség beszivárgásra eső részét határozza meg:

$$Q = \int_0^T q \cdot dt \ , \tag{45}$$

így a térszín éves süllyedése a (44) és (45) felhasználásával a

$$h = \frac{1}{1-\kappa} \cdot \frac{C_e}{\rho_{kő}} \cdot Q \tag{46}$$

formában számítható ki.

A (46) összefüggés birtokában már meghatározhatjuk a denudáció sebességét. A gyakorlati mérések tapasztalatai szerint a beszivárgó oldószer hőmérséklete a törmelékes oldódási zónában $10°C \approx 283°K$. E hőmérsékleten a víz diffúziós állandója $D = 3,22 \cdot 10^{-10} m^2 / s$, kinematikai viszkozitási tényezője $\nu = 1,28 \cdot 10^{-6} m^2 / s$. Az oldószer szivárgási sebessége a törmelékes oldódási zónában $v = 10^{-2} m / s$, a gömb alakú törmelékdarabok kezdeti sugara a kőzet repedezettsége alapján $R_0 \approx 10^{-2} m$. A gömb alakú törmelék-

darabokból felépülő törmelékes oldódási zóna hézagtérfogatának értékét válasszuk $\kappa = 0{,}11$ nagyságúnak.

A szakirodalmi adatok és számítások alapján, ha a vizsgált hőmérsékleten a talajban a vízre $0{,}08\ pCO_2$ parciális nyomás hatott, akkor az oldószer egyensúlyi $CaCO_3$ koncentrációja $C_e = 0{,}3123\ kg/m^3$. A mészkő sűrűsége $\rho_{kő} = 2700\ kg/m^3$, a karsztos térszínen az átlagos beszivárgás a mérések alapján $600\ mm/év$ csapadékhozamból 27%-os arányú beszivárgással $Q = 162\ mm/év$ (Maucha, L. közlése) számoltunk (*JAKUCS* 1977, *MAUCHA* 1990, *SZUNYOGH* 1994, *IZÁPY-MAUCHA* 2000, *PÉNTEK-VERESS* 2002).

Ezen adatok birtokában a karsztos térszín éves süllyedése a (46) felhasználásával

$$h = \frac{1}{1-0{,}11} \cdot \frac{0{,}3123}{2700} \cdot 162\ mm/év = 0{,}021\ mm/év\ , \tag{47}$$

ami azt jelenti, hogy 1000 év alatt a karsztos térszín süllyedése 21 mm. Ez az érték jó egyezést mutat a denudáció mértékére elfogadott, más módszerekkel nyert értékkel.

A törmelékes oldódási zóna felső peremének süllyedési sebessége a (14) alapján

$$w_0 = \frac{0{,}11}{1-0{,}11} \cdot \frac{10^{-2}}{2700} \cdot 0{,}3123 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}\ m/s\ . \tag{48}$$

A (15), (17) és (26) összefüggésben szereplő $\lambda (> 0)$ paraméter értéke a (41) alapján

$$\lambda = \frac{255}{16} \cdot \frac{0{,}3123 \cdot \sqrt[3]{\left(3{,}22 \cdot 10^{-10}\right)^2 \cdot 1{,}28 \cdot 10^{-6}}}{2700 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot \left(10^{-2}\right)^2} = 0{,}672\ \ m^{-1}\ , \tag{49}$$

végül a karsztos oldás általános egyenletrendszerének megoldását jelentő függvények alakja a (15), (17) és (26) felhasználásával

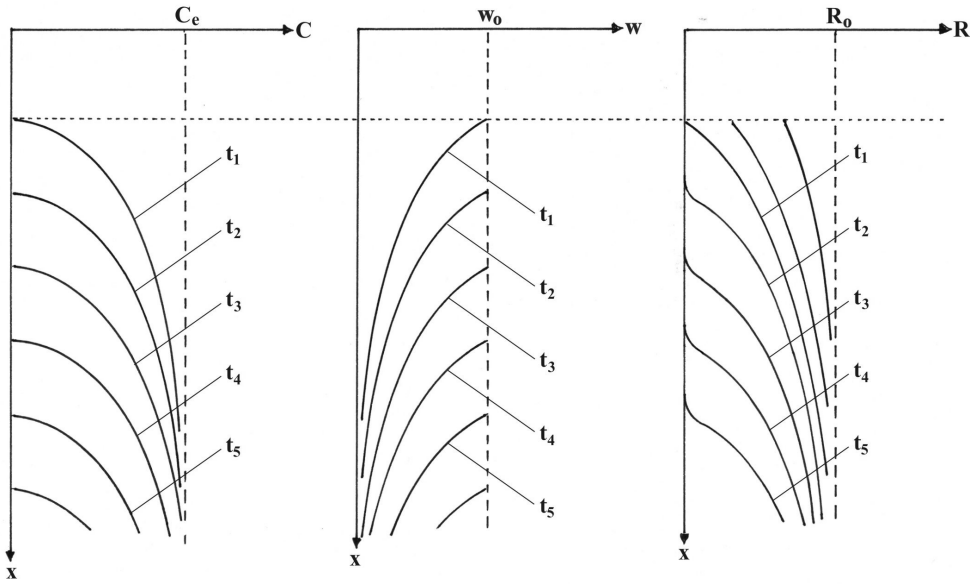
$$C(x,t) = 0{,}3123 \cdot \left(1 - e^{-0{,}672 \cdot \left(x - 1{,}4 \cdot 10^{-7} t\right)}\right) \left[kg/m^3\right] \quad x \geq 1{,}4 \cdot 10^{-7} t\ , \tag{50}$$

$$(51) \qquad w(x,t) = 1,4 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-0,672 \cdot \left(x - 1,4 \cdot 10^{-7} t\right)} \; [m/s] \quad x \geq 1,4 \cdot 10^{-7} t \; ,$$

és

$$(52) \qquad R(x,t) = 10^{-2} \cdot e^{\frac{e^{-0,672 \cdot x} - e^{-0,672 \cdot \left(x - 1,4 \cdot 10^{-7} t\right)}}{3}} \; [m] \quad x \geq 1,4 \cdot 10^{-7} t \; ,$$

ahol e három összefüggésben szereplő *x* mélységet $[m]$, a *t* időt $[s]$ mértékegységben mérjük (*3. ábra*).



3. ábra: A $C(x,t)$, $w(x,t)$ és $R(x,t)$ *függvények a* t_i *időpontban*
$(i = 1,2,3,4,5$ és $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$

Fig. 3 The functions $C(x,t)$, $w(x,t)$ and $R(x,t)$ *at point of time* t_i
$(i = 1,2,3,4,5$ and $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$

6. Összegzés

A karsztos oldás egyenletrendszerének egy megoldását bemutató munkánk eredményeinek összefoglalásaként a következő megállapításokat fogalmazhatjuk meg.

a. A karsztos térszín süllyedése a teljes tömegáramsűrűség állandóságának törvényét követve megy végbe: a teljes törmelékes oldódási zónában adott idő alatt, adott vízszintes helyzetű keresztmetszeten áthaladó $CaCO_3$ folyadék fázisból és szilárd fázisból összetevődő teljes tömegáramsűrűség a törmelékes zóna minden pontjában állandó.

b. A karsztos térszín felső pereme a karsztos pusztulásból származó, a karsztosodás körülményei által szabályozott módon állandó nagyságú sebességgel süllyed.

c. A lefelé szivárgó karsztos oldat pillanatnyi $CaCO_3$ koncentrációja exponenciálisan telítődik, s a süllyedő törmelékes oldódási zónát kísérő (15) alakú aperiodikus hullámfüggvénnyel írható le.

d. A törmelékes oldódási zónában levő törmelékdarabok süllyedési sebessége a zónában lefelé haladva exponenciálisan csökken, s a süllyedő zónát kísérő (17) alakú aperiodikus hullámfüggvénnyel írható le.

e. A törmelékes oldódási zónában található törmelékgömbök sugara a zónában alulról felfelé haladva a zóna mindenkori felső pereméig a (26) alakú függvény szerint csökken. A folyamat kezdetén minden törmelékgömb egyforma méretű, majd fokozatosan oldódnak és tűnnek el a felső rétegek.

IRODALOM

IZÁPY, G. – MAUCHA, L. (2000): A magyarországi karsztos denudáció sebességének becslése – Karsztfejlődés V. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 7-20.

JAKUCS, L. (1971): A karsztok morfogenetikája. – Akadémiai Kiadó, Budapest 310 p.

MAUCHA, L. (1990): A karsztos beszivárgás számítása – Hidrológiai Közlöny, 70. 3. p. 153-161.

PÉNTEK, K. (2001): Karsztosodó mészkő térszínek lepusztulásának matematikai modellje – Karsztfejlődés VI. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 13-25.

PÉNTEK, K. (2007): A horizontális karsztosodás egyenletrendszerének levezetése elemi tárgyalással – Karsztfejlődés XII. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 53-70.

PÉNTEK, K. – VERESS, M. (2002): A karsztos lepusztulás sebességének kiszámítása egy törmelékes oldódási zóna adatainak felhasználásával - Karsztfejlődés VII., BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 73-86.
SZUNYOGH, G. (1994): A horizontális karsztos lepusztulás folyamatának matematikai modellezése – A Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei IX. Természettudományok 4. Szombathely, p. 173-201.
VERESS, M. – PÉNTEK, K. (1990): Kísérlet a karsztos felszínek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.
VERESS, M. – PÉNTEK, K. (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.