KARSZTFEJLŐDÉS XII.
Szombathely, 2007. pp. 53-70.

A HORIZONTÁLIS KARSZTOSODÁS EGYENLET-RENDSZERÉNEK LEVEZETÉSE ELEMI TÁRGYALÁSSAL

PÉNTEK KÁLMÁN

Berzsenyi Dániel Főiskola, Matematika és Információtudományi Intézet
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4. pentek@bdf.hu

Abstract: The paper presents an elementary mathematical description of the horizontal karstification process, which occurs in the zone of debris of surface of limestone.

1. Bevezetés

A mészkő törmelékes oldódási zónát képező – horizontális karsztosodásnak nevezett – denudációs folyamat geomorfológiai modellje és annak első matematikai leírása *VERESS-PÉNTEK* (1990, 1996) munkáiban szerepel.

A matematikai modell ettől eltérő felépítésű, a felsőbb matematika eszközeit felhasználó tárgyalását *SZUNYOGH* (1994) készítette el. Az első matematikai modell finomítását *PÉNTEK* (2001) és annak továbbfejlesztését *PÉNTEK–VERESS* (2002) végezte el.

SZUNYOGH (1994) dolgozata parciális differenciálegyenletek felhasználásával, függvénytani eszközök alkalmazásával tárgyalja a karsztos pusztulás törmelékes zónás modelljét. Talán éppen az alkalmazott matematikai módszerek mélysége miatt a dolgozat nem váltott ki komolyabb visszhangot a felsőbb matematika eszközeit kevésbé alkalmazó karsztos kutatók körében.

Jelen dolgozat kísérletet tesz arra, hogy lehetőleg minél elemibb módszerekkel mutassa be azt az utat, amellyel az átlagosnál komolyabb matematikai felkészültség nélkül is levezethetjük a törmelékes oldódási zónát kialakító karsztos pusztulás egyenletrendszerét.

2. A geomorfológiai modell

A törmelékes zónát képező karsztosodás geomorfológiai modelljének felépítésénél egy talajréteggel borított, horizontális elhelyezkedésű mészkő térszínből indulunk ki. A talajrétegen átszivárgó csapadékvíz széndioxiddal feldúsulva éri el a kőzet felső határát, amelynek felső tartományát törések és repedések rendszere szövedékként járja át. E kőzettartományba felülről be-

szivárgó víz oldó hatása révén szélesíti a repedések rendszerét, s miközben lefelé halad, fokozatosan telítődve elveszti oldóképességét.

A kőzet felső tartománya a térben minden irányban fejlődő repedések hálózata mentén végbemenő oldás hatására törmelékdarabokra különül, ezzel egy aprózódási folyamat veszi kezdetét. Az aprózódás mértéke lefelé haladva csökken, s fokozatos átmenetet képez a szálban álló mészkő felé. E folyamat eredményeként fejlődik ki a kőzet felső tartományából a törmelékes oldódási zóna. A törmelékdarabok méretét a kőzet repedezettségi mértéke határozza meg, méretük a szálkőzettől felfelé haladva fokozatosan csökken. Ennek oka egyrészt az, hogy a törmelékes oldódási zóna felső részén levő darabok már korábban szakadtak le a szálkőzetről, másrészt itt a legintenzívebb az oldódási folyamat, a felülről érkező legagresszívebb oldószerrel itt találkozik a mészkő törmelék.

A törmelékdarabok felülete oldódásuk során legömbölyödik, méretük egyre csökken, amíg végül teljesen feloldódnak. A törmelékes zóna felső határa folyamatosan tolódik lefelé azáltal, hogy az oldószer hatására a zóna felső részén eltűnnek a teljesen feloldódott törmelékdarabok. Az így még nem teljesen telítődött oldószer a szálkőzet felső tartományába hatol, ezáltal a zóna a szálkőzet aprózódásával alulról pótlódik.

Ha az oldás körülményei számottevően nem változnak, akkor a folyamatra jellemző szemcseeloszlású törmelékes oldódási zóna fejlődik ki. Ha azonban a karsztos oldást meghatározó körülmények lényegesen megváltoznak, akkor az új helyzetre jellemző, a korábbitól eltérő szemcseeloszlású törmelékes zóna alakul ki. A törmelékes zóna felső határa, s vele együtt a karsztos térszín is olyan ütemben süllyed, ahogyan ezt a zónát alkotó törmelékdarabok felületén végbemenő karsztos oldás folyamata lehetővé teszi.

A törmelékes oldódási zóna elvileg az autogén karsztok teljes területén megszakítatlanul kifejlődhet. Mivel azonban a karsztos térszíneken az oldást meghatározó tényezők lokálisan jelentős mértékben eltérhetnek egymástól, így a térszín különböző helyein a lepusztulás sebessége is jelentős eltéréseket mutathat. Ez a differenciált ütemű süllyedés oldásos töbrös formakincs kialakulását eredményezi. A folyamat fokozatosan öngerjesztővé is válhat azáltal, hogy a töbrök alján több talaj és nedvesség halmozódik fel, ez lokálisan növeli az oldószer agresszivitását. Ez pedig a környezeténél gyorsabb ütemű süllyedést eredményez.

3. A matematikai modell

A törmelékes oldódási zónát képező karsztosodás matematikai modelljének megszerkesztése során a geomorfológiai modell lényeges tulajdonságainak megtartása mellett a következő idealizáló feltevéseket fogalmazzuk meg.

a. Feltételezzük, hogy a karsztosodó térszín vizsgált tartományában a szálkőzet, illetve a törmelékes zóna felső határa horizontális elhelyezkedésű. Feltesszük továbbá, hogy a kőzetet borító talajtakaró vastagsága is azonos, így teljesen sík, vízszintes helyzetű térszínre hullik a karsztosodást működtető csapadékvíz.

b. Feltételezzük, hogy a talajban, illetve a törmelékes zónában haladó, törmelékdarabokat kerülgető csapadékvíz függőleges irányban szivárog lefelé.

c. Feltesszük, hogy a törmelékes oldódási zónában levő törmelékdarabok tökéletesen gömb alakúak. A gömbök átmérője kezdetben a szálkőzet szomszédos repedéseinek átlagos távolságával egyezik meg, az oldódás során gömbalakjukat megtartva átmérőjük fokozatosan csökken nullára a teljes feloldottságig.

d. Tételezzük fel, hogy a törmelékes oldódási zóna törmelékgömbjeinek nagysága jellemző a zónában elfoglalt helyzetére. A zóna felső részén kicsi, lefelé haladva egyre nagyobb gömbök találhatók, s a zóna bármely vizsgált helyének közelében nagyjából azonos méretű gömbök helyezkednek el.

e. Az oldódás során az egyre kisebb törmelékgömbök egymással továbbra is érintkeznek, egyre kisebb térfogatot töltenek ki, s ezért a zóna felső határa, s vele együtt a karsztos térszín felszíne is vízszintes helyzetét megtartva süllyed.

f. Az egymással érintkező gömbök rendszeréből felépülő törmelékes oldódási zónában a gömbök rendszere közti hézagok térfogatarányát jellemző κ hézagtérfogat a teljes zónában, térben és időben is állandó. E hézagokat a lefelé szivárgó oldószer tölti ki.

g. A törmelékgömbök rendszerén átszivárgó csapadékvízről feltételezzük, hogy belső súrlódástól mentes, összenyomhatatlan, ideális folyadékként viselkedik. A törmelékes oldódási zónában szivárgó csapadékvíz, mint oldószer mozgásáról feltételezzük, hogy lamináris, örvénymentes és időben a karsztos denudáció sebességéhez igazodva nagyon lassan változó kvázistacionárius áramlás.

A geomorfológiai modellt kiegészítő idealizáló feltevések ezen rendszere lehetővé teszi olyan matematikai összefüggések megfogalmazását, amelyekből levezethető a törmelékes oldódási zónát létrehozó karsztos denudáció általános egyenletrendszere. Ezen egyenletrendszer felállításához több lépésben jutunk el.

4. Az oldószer áramlása a törmelékes oldódási zónában

Először a törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges térbeli pontjában, egy adott időpontban értelmezzük a hézagtérfogat fogalmát. A törmelékgömbökkel kitöltött törmelékes oldódási zóna valamely P pontjának adott t időpontban képezett hézagtérfogatán azt a dimenzió nélküli pozitív valós számot értjük, amely megmutatja, hogy a P pont körüli kicsiny $V(>0)$ térfogatú tartomány hányad részét tölti ki az egymással érintkező törmelékgömbök közti hézagok V' térfogata, azaz legyen

$$\kappa := \frac{V'}{V} \,, \tag{1}$$

mivel $0 < V' \leq V$, így $0 < \kappa \leq 1$ teljesül.

A törmelékes oldódási zónán belül a hézagtérfogat nagysága elvileg pontról pontra, s az idő múlásával is változhat, azonban a tapasztalattal jó megegyezésben, s összhangban a 3. fejezet f. pontjával elfogadjuk, hogy κ értéke a teljes oldódási zónában mindenütt azonos, s értéke az idő múlásával sem változik.

A 3. fejezet a. pontjának feltevése folytán a törmelékes zóna felső határa és a talajtakaró felszíne is vízszintes, így egyenletes csapadékhullást és beszivárgást elfogadva a törmelékes oldódási zónában a törmelékgömbök mérete és eloszlása, s így az oldószer szivárgásának v sebessége is a törmelékes zóna felső peremétől mért távolságtól függhet csupán, bármely rögzített mélységben v értéke azonos. Ez szemléletesen úgy fogalmazható meg, hogy a törmelékes oldódási zóna horizontálisan bármely irányban önmagában eltolható, más szóval ezen irányokban eltolási szimmetriával rendelkezik.

Most belátjuk, hogy a szivárgás v sebessége a törmelékes zóna peremétől mért távolságtól sem függ, értéke vertikálisan is állandó. Tekintsük ennek bizonyítására a törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges olyan egyenes hasáb alakú tartományát, amelynek alap- és fedőlapja az oldószer szivárgási irányára merőlegesen, vízszintesen helyezkedik el. A hasáb oldallapjai pedig álljanak a szivárgás irányával párhuzamosan, függőleges helyzetben.

Tegyük fel, hogy a hasáb A területű fedőlapján v_1 sebességgel mozgó oldószer lép be, s ugyanekkora A területű alaplapján pedig v_2 sebességű oldószer lép ki. Mivel a hasáb oldallapjai az oldószer szivárgásának irányával párhuzamosak, így az oldallapokon sem nem lép be, sem nem lép ki

oldószer. Kicsiny Δt időtartam alatt a fedőlapon keresztül belépő oldószer térfogata:

(2) $$V_{be} = \kappa \cdot A \cdot v_1 \cdot \Delta t \ ,$$

az alaplapon keresztül kilépő oldószer térfogata a κ hézagtérfogat állandósága folytán

(3) $$V_{ki} = \kappa \cdot A \cdot v_2 \cdot \Delta t \ .$$

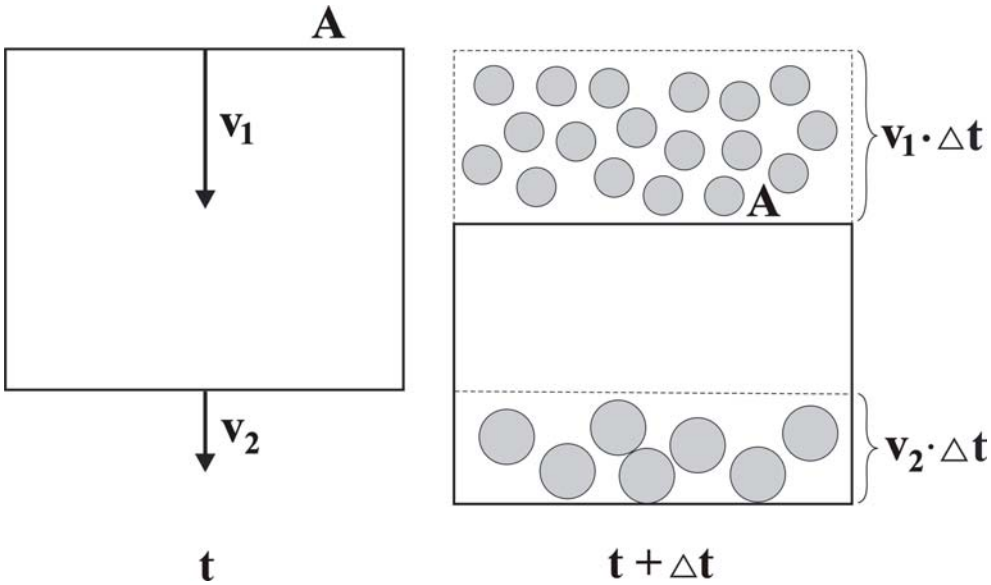
Az oldószerek a 3. fejezet g. pontjában feltételezett összenyomhatatlansága miatt a belépő és kilépő térfogatok egyenlőek:

(4) $$V_{be} = V_{ki} \ ,$$

ahonnan a közös $\kappa \cdot A \cdot \Delta t$ mennyiséggel történő egyszerűsítés után a

(5) $$v_1 = v_2$$

összefüggés adódik (*1. ábra*).



1. ábra: A kontinuitási egyenlet a törmelékes zónában
Fig. 1: Equation of continuity in the zone of debris

Eredményünk úgy fogalmazható meg, hogy a teljes törmelékes oldódási zóna valamennyi pontjában az oldószer szivárgásának v sebessége állandó, ennek értékét a karsztosodást jellemző klimatikus, talajtani és kőzettani tényezők határozzák meg. Ez az összefüggés tulajdonképpen a törmelékes oldódási zónára vonatkozó kontinuitási egyenlet (*BUDÓ* 1972).

5. Az anyag áramlása a törmelékes oldódási zónában

A törmelékes oldódási zónában a karsztos oldás során a $CaCO_3$ két fázisban van jelen: egyrészt oldott állapotban az oldószerben, ez a folyadék fázis, másrészt a törmelékgömbök anyagában, ez a szilárd fázis.

Az előző fejezetben látottakhoz hasonlóan tekintsük a törmelékes oldódási zóna egy kis méretű, ΔV térfogatú, egyenes hasáb alakú tartományát, amelynek alap- és fedőlapja vízszintes helyzetű, oldallapjai függőlegesek. E kis ΔV térfogatú hasábban az oldószerrel kitöltött hézag $\Delta V_{víz}$ térfogata a κ hézagtérfogat értelmezése folytán

$$\Delta V_{víz} = \kappa \cdot \Delta V \quad . \tag{6}$$

A víz egységnyi térfogatában feloldott $CaCO_3$ tömege az oldat C koncentrációjával arányos, így a $\Delta V_{víz}$ térfogatú oldószerben (6) felhasználásával

$$\Delta m_{víz} = C \cdot \Delta V_{víz} = \kappa \cdot C \cdot \Delta V \tag{7}$$

tömegű $CaCO_3$ van oldott állapotban. Ezért a $CaCO_3$ sűrűsége a folyadékfázisban:

$$\rho_V = \frac{\Delta m_{víz}}{\Delta V} = \kappa \cdot C \tag{8}$$

nagyságú.

A ΔV térfogatú hasáb alakú tartományban a kőzetgömbök térfogata hézagtérfogat értelmezése folytán (6) figyelembevételével

$$\Delta V_{kő} = (1 - \kappa) \cdot \Delta V \quad . \tag{9}$$

Ha $\rho_{kő}$ a $CaCO_3$ sűrűsége, akkor a ΔV térfogatú hasáb alakú tartományban levő mészkő tömege a (9) felhasználásával

(10) $$\Delta m_{kő} = \rho_{kő} \cdot \Delta V_{kő} = (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot \Delta V \ .$$

Ezért a $CaCO_3$ sűrűsége a szilárd fázisban

(11) $$\rho_K = \frac{\Delta m_{kő}}{\Delta V} = (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}$$

nagyságú.

A ΔV térfogatú tartomány ρ_T teljes $CaCO_3$ sűrűsége pedig (8) és (11) alapján

(12) $$\rho_T = \rho_V + \rho_K = \kappa \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \ .$$

Legyen a törmelékes oldódási zóna ΔV térfogatú kis hasábja alap- és fedőlapjának területe A, az oldószer szivárgásának állandó nagyságú sebessége v, s a hasábban található törmelékgömbök süllyedési sebessége w, amelynek értéke a tartomány kis mérete miatt szintén a tartományban állandónak tekinthető.

Ekkor egyrészt a vízben oldott $CaCO_3$ a víz szivárgási v sebességével halad, ezért a folyadék fázis tömegáramlása a (7) alapján kicsiny Δt idő alatt

(13) $$\Delta m_1 = \rho_V \cdot A \cdot v \cdot \Delta t = \kappa \cdot C \cdot A \cdot v \cdot \Delta t \ ,$$

ahonnan a folyadék fázis anyagáramlási sűrűsége

(14) $$f_1 = \frac{\Delta m_1}{A \cdot \Delta t} = \kappa \cdot C \cdot v$$

értékűnek adódik.

Másrészt a törmelékgömbökben levő $CaCO_3$ w sebességgel süllyed („áramlik”), ezért a szilárd fázis tömegáramlása a (10) alapján a kicsiny Δt idő alatt

(15) $$\Delta m_2 = \rho_K \cdot A \cdot w \cdot \Delta t = (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot A \cdot w \cdot \Delta t \ ,$$

ebből pedig a szilárd fázis anyagáramlási sűrűsége

(16) $$f_2 = \frac{\Delta m_2}{A \cdot \Delta t} = (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w$$

lesz.

Így a felületegységen időegység alatt áthaladó $CaCO_3$ oldat (folyadék fázis) és törmelékösszlet (szilárd fázis) teljes tömegáram sűrűsége a (14) és (16) felhasználásával:

(17) $$f = f_1 + f_2 = \kappa \cdot C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w$$

értékűnek adódik.

6. A tömeg megmaradásának elve a törmelékes oldódási zónában

Tekintsük a törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges, de rögzített, a térben fix helyzetű, egyenes hasáb alakú tartományát, amelynek alap- és fedőlapja vízszintes, oldallapjai függőlegesek. Legyen e tartomány térfogata ΔV, alap- és fedőlapjának területe A, magassága Δx. Legyen továbbá Δx olyan kicsi, hogy a tartomány belsejében levő törmelékgömbök pillanatnyi átmérőjét egyenlőnek tekinthessük.

Vizsgáljuk meg a ΔV térfogatú tartományban kicsiny Δt idő alatt a $CaCO_3$ anyagáramlásában bekövetkező tömegváltozást! A ΔV térfogatú hasábban a t időpontban levő $CaCO_3$ teljes tömege a (12) összefüggés alapján:

(18) $$M(t) = \rho_T(t) \cdot \Delta V = \left[\kappa \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}\right] \cdot \Delta V \ .$$

A ΔV térfogatú hasábban a $t + \Delta t$ időpontban levő $CaCO_3$ teljes tömege szintén a (12) felhasználásával

(19) $$M(t+\Delta t) = \rho_T(t+\Delta t) \cdot \Delta V = \left[\kappa(C+\Delta C) + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}\right] \cdot \Delta V = \\ = \left[\kappa \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}\right] \cdot \Delta V + \kappa \cdot \Delta C \cdot \Delta V \ ,$$

ahol $C + \Delta C$ jelöli a folyadékfázisban levő $CaCO_3$ koncentráció értékét a $t + \Delta t$ időpontban.

Ekkor a (18) és (19) alapján

(20) $$\Delta M = M(t+\Delta t) - M(t) = \left[\kappa \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}\right] \cdot \Delta V + \kappa \cdot \Delta C \cdot \Delta V -$$

$$-\left[\kappa \cdot C + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő}\right] \cdot \Delta V = \kappa \cdot \Delta C \cdot \Delta V = \kappa \cdot \Delta C \cdot A \cdot \Delta x$$

a Δt idő alatt a ΔV térfogatú tartományban bekövetkezett $CaCO_3$ tömegének megváltozása.

A ΔV térfogatú hasábba Δt idő alatt a fedőlapon keresztül belépő anyagáram tömege a (17) összefüggés alapján

$$(21) \qquad M_{be} = \left[\kappa \cdot C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w\right] \cdot A \cdot \Delta t \ .$$

A ΔV térfogatú hasábból Δt idő alatt az alaplapon keresztül kilépő anyagáram tömege a (17) összefüggés felhasználásával

$$(22) \qquad M_{ki} = \left[\kappa (C + \Delta C) \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot (w + \Delta w)\right] \cdot A \cdot \Delta t \ ,$$

ahol $w + \Delta w$ jelenti a törmelékgömbök süllyedési sebességét a $t + \Delta t$ időpontban.

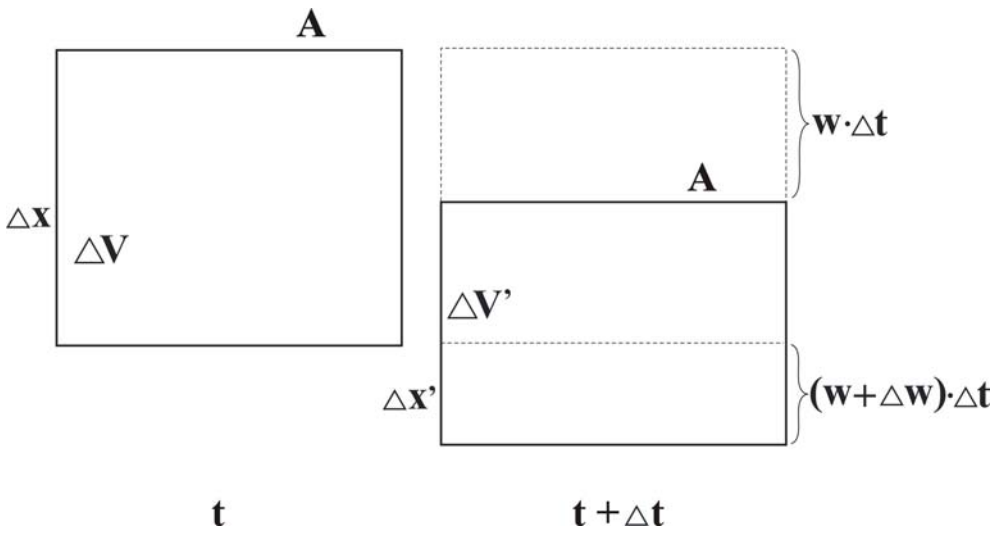
Ekkor a (21) és (22) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned}
(23) \qquad M_{be} - M_{ki} &= \left[\kappa \cdot C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w\right] \cdot A \cdot \Delta t - \\
&- \left[\kappa (C + \Delta C) \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot (w + \Delta w)\right] \cdot A \cdot \Delta t = \\
&= \left[\kappa \cdot C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w\right] \cdot A \cdot \Delta t - \\
&- \left[\kappa \cdot C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot w\right] \cdot A \cdot \Delta t - \\
&- \left[\kappa \cdot \Delta C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot \Delta w\right] \cdot A \cdot \Delta t = \\
&= -\left[\kappa \cdot \Delta C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot \Delta w\right] \cdot A \cdot \Delta t
\end{aligned}$$

adódik. Az oldószer feltevésünk folytán függőlegesen szivárog lefelé a 3. fejezet b. pontjával összhangban. A törmelékgömbök süllyedése ugyancsak függőlegesen lefelé történik, így a vizsgált hasáb oldallapjain sem befelé, sem kifelé nem áramlik sem folyadék fázisú, sem pedig szilárd fázisú $CaCO_3$. Ezért a tömeg megmaradásának elve szerint a (20) és (23) alapján a

$$(24) \qquad \Delta M = M_{be} - M_{ki}$$

összefüggést eredményezi (*2. ábra*).



2. ábra: A tömeg megmaradásának elve a törmelékes zónában I.
Fig. 2: Equation of mass conservation in the zone of debris I.

A (20), (23) és (24) egyenletek felhasználásával ekkor

(25) $$\kappa \cdot \Delta C \cdot A \cdot \Delta x = -\left[\kappa \cdot \Delta C \cdot v + (1-\kappa) \cdot \rho_{kő} \cdot \Delta w\right] \cdot A \cdot \Delta t$$

következik, ahonnan az $A \cdot \kappa \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ mennyiséggel történt osztás után

(26) $$\frac{\Delta C}{\Delta t} = -\left[v \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x}\right]$$

következik, amelynek átrendezésével nyerjük a

(27) $$\frac{\Delta C}{\Delta t} + v \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} = 0$$

egyenletet.

Közönséges sebességű karsztosodási folyamatoknál a (27) egyenlet első tagja elhanyagolható, tehát

(28) $$\frac{\Delta C}{\Delta t} \approx 0 \ ,$$

így a (27) összefüggés a

(29) $$\boxed{v \cdot \frac{\Delta C}{\Delta x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} = 0}$$

alakot ölti. A (29) a karsztos oldást meghatározó első alapegyenlet.

7. Kapcsolat a törmelékgömbök mérete és a süllyedés sebessége között

A korábbi fejezetekhez hasonlóan tekintsük a törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges, de rögzített egyenes hasáb alakú tartományát, amelynek alap- és fedőlapja legyen vízszintes, oldallapjai függőlegesek. Legyen a hasáb térfogata ΔV, alap- és fedőlapjának területe A, magassága Δx. Tegyük fel, hogy Δx olyan kicsiny méretű, hogy a hasáb belsejében levő törmelékgömbök mérete egyenlő nagyságúnak tekinthető.

A hasábban levő törmelékgömbök a karsztos oldódás eredményeként Δt idő alatt süllyednek, s ezen süllyedés eredményeként egy $\Delta V'$ térfogatú, továbbra is A alap- és fedőlap területű, ám $\Delta x'$ magasságú hasábot alkotnak.

Ha a kiindulási hasáb fedőlapjának süllyedése w sebességű, az alaplapé pedig $w + \Delta w$, akkor a t időpontban a hasáb térfogata

(30) $$\Delta V = A \cdot \Delta x \ ,$$

a süllyedés eredményeként a $t + \Delta t$ időpontban a keletkezett hasáb térfogata

(31) $$\Delta V' = A \cdot \Delta x' \ .$$

Könnyen belátható, hogy

(32) $$\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x + (w + \Delta w) \cdot \Delta t - w \cdot \Delta t = \\ &= \Delta x + w \cdot \Delta t + \Delta w \cdot \Delta t - w \cdot \Delta t = \\ &= \Delta x + \Delta w \cdot \Delta t \ , \end{aligned}$$

ahonnan

(33) $$\Delta(\Delta x) = \Delta x' - \Delta x = \Delta w \cdot \Delta t$$

adódik. Ebből a (31) felhasználásával

(34) $$\Delta V' = A \cdot \Delta x' = A \cdot (\Delta x + \Delta w \cdot \Delta t)$$

következik, s a (30) és (34) alapján

$$\Delta(\Delta V) = \Delta V' - \Delta V = A \cdot (\Delta x + \Delta w \cdot \Delta t) - A \cdot \Delta x = \\ = A \cdot \Delta x + A \cdot \Delta w \cdot \Delta t - A \cdot \Delta x = A \cdot \Delta w \cdot \Delta t \tag{35}$$

összefüggést nyerhetjük. Innen

$$\frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta t} = A \cdot \Delta w \ , \tag{36}$$

ahonnan pedig a (30) és (36) összefüggések alapján

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta t} = \frac{1}{A \cdot \Delta x} \cdot A \cdot \Delta w = \frac{\Delta w}{\Delta x} \tag{37}$$

következik (*2. ábra*).

A (37) összefüggés bal oldalán álló mennyiséget más módon is előállíthatjuk. Ha a Δt térfogatú hasáb N számú R sugarú törmelékgömböt tartalmaz, akkor ezek teljes térfogata a (9) alapján

$$N \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = (1 - \kappa) \cdot \Delta V \ , \tag{38}$$

amelyből egyszerű átrendezéssel nyerhetjük a későbbiek során felhasználandó

$$\frac{N}{1 - \kappa} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = \Delta V \tag{39}$$

összefüggést is.

A ΔV térfogatú hasáb Δt idő elteltével lefelé süllyedve $\Delta V'$ térfogatú hasábbá alakul, de a benne található törmelékgömbök N száma nem, sugaruk viszont R nagyságról $R + \Delta R$ értékűre változik. Ekkor ugyancsak a (9) alapján fennáll az

$$N \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot (R + \Delta R)^3 = (1 - \kappa) \cdot \Delta V' \tag{40}$$

összefüggés.

Vonjuk ki ezután a (40) összefüggésből a (38) összefüggést, ezzel az

$$N \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left[(R + \Delta R)^3 - R^3 \right] = (1 - \kappa) \cdot \left[\Delta V' - \Delta V \right] \tag{41}$$

egyenlőséget kapjuk. A bal oldalon elvégezve a harmadik hatványra történő emelést, a

$$N \cdot \frac{4\pi}{3} \left[(R^3 + 3R^2 \cdot \Delta R + 3R \cdot (\Delta R)^2 + (\Delta R)^3 - R^3 \right] = \tag{42}$$
$$= (1 - \kappa) \cdot \left[\Delta V' - \Delta V \right]$$

összefüggés adódik. Mivel ΔR kicsi, így a $(\Delta R)^2$ és $(\Delta R)^3$ mennyiségeket tartalmazó tagokat elhanyagolhatjuk. Ezután az összevonások, egyszerűsítés és Δt értékével történő osztás eredményeként

$$\frac{N}{1 - \kappa} \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta t} \tag{43}$$

következik, ahonnan a (39) és (43) alapján

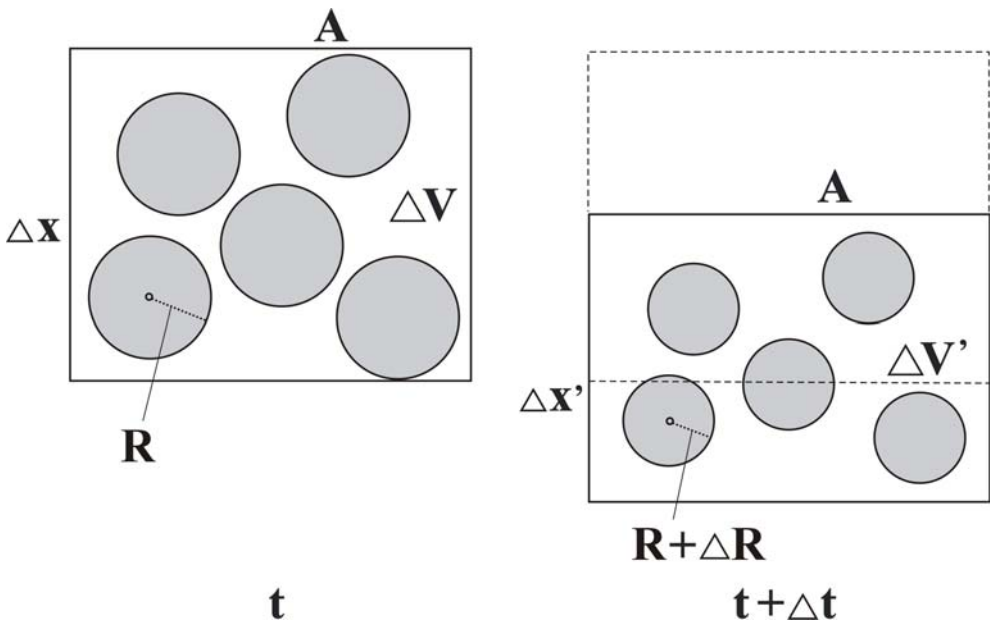
$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{N}{1 - \kappa} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3} \cdot \frac{N}{1 - \kappa} \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \tag{44}$$
$$= \frac{3}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

adódik (*3. ábra*).

A (37) és (44) összefüggésekben a bal oldalon álló kifejezések megegyeznek, így a jobb oldalaknak is egyenlőknek kell lenniük, ezért érvényes a

$$\boxed{\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t}} \tag{45}$$

egyenlőség. A (45) a karsztos oldódást meghatározó második alapegyenlet.



3. ábra: A tömeg megmaradásának elve a törmelékes zónában II.
Fig. 3: Equation of mass conservation in the zone of debris II.

8. Egy törmelékgömb oldódása

Tekintsük a törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges R sugarú törmelékgömbjét, amelynek V térfogata

(46) $$V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \ .$$

Ha Δt idő elteltével a törmelékgömb sugara $R + \Delta R$, akkor ennek V' térfogata

(47) $$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot (R + \Delta R)^3 \ ,$$

a térfogat megváltozása pedig

(48) $$\Delta V = V' - V = \frac{4\pi}{3} \cdot \left[(R + \Delta R)^3 - R^3 \right] .$$

Végezzük el a (48) jobb oldalán szereplő harmadik hatványra történő emelést a (42) összefüggéshez hasonlóan. Mivel ΔR kicsi, így most is hanyagoljuk el a $(\Delta R)^2$, illetve a $(\Delta R)^3$ mennyiségeket tartalmazó tagokat. Ekkor az összevonások után a (48) összefüggés a

$$\Delta V = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 \cdot \Delta R = 4\pi \cdot R^2 \cdot \Delta R \tag{49}$$

alakra hozható.

Az általános karsztos oldódási folyamat klasszikus matematikai leírását Nernst, W. (1904) adta meg a

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot S \cdot (C_e - C) \tag{50}$$

alakú összefüggés segítségével, ahol

Δm = a mészkő oldásnak kitett felületéről eltávozott tömeg,
Δt = az oldás vizsgált időtartama,
k_K = a kémiai oldás sebességi állandója,
k_T = a határrétegben történő anyagtranszport (anyaghozam) sebességi állandója,
S = az oldódó mészkő felületének felszíne,
C_e = a feloldott $CaCO_3$ egyensúlyi koncentrációja,
C = a karsztos oldat pillanatnyi $CaCO_3$ koncentrációja.

Esetünkben az (50) jobb oldalán

$$S = 4\pi \cdot R^2 \ , \tag{51}$$

az egyenlet bal oldalán pedig (49) felhasználásával

$$\Delta m = -\rho_{kő} \cdot \Delta V = -\rho_{kő} \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot \Delta R \ , \tag{52}$$

így az (50) egyenlet alakja

$$-\rho_{kő} \cdot \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \Delta R}{\Delta t} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot (C_e - C) \ , \tag{53}$$

ahonnan egyszerűsítés után

$$-\frac{\Delta R}{\Delta t}=\frac{C_e-C}{\rho_{kő}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{k_K}+\frac{1}{k_T}} \tag{54}$$

adódik.

Az anyagtranszport (anyaghozam) sebessége *DUBLJANSZKIJ* (1987) alapján előállítható a

$$k_T=\frac{85}{8}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\sqrt[3]{D^2\nu} \tag{55}$$

alakban, ahol

δ = az áramló rendszerre jellemző karakterisztikus méret, itt a törmelékgömb átmérője,

D = a diffúziós állandó,

ν = az áramló oldószer kinematikai visztozitási tényezője.

Az (55) összefüggés felhasználásával az (54) egyenlet a

$$\boxed{-\frac{\Delta R}{\Delta t}=\frac{C_e-C}{\rho_{kő}}\cdot\left(\frac{1}{k_K}+\frac{16}{85}\cdot\frac{R}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right)^{-1}} \tag{56}$$

alakra hozható. Az (56) a karsztos oldódást meghatározó harmadik alapegyenlet.

9. Összegzés – a karsztos oldás általános egyenletrendszere

Az előző fejezetekben áttekintettük a törmelékes oldódási zónát kialakító karsztos oldódás legfontosabb összefüggéseit. Ezek eredményeként levezettük a (29), (45) és (56) összefüggéseket, amelyek együtt a karsztos oldódás általános egyenletrendszerét alkotják.

Egyenletrendszerünkben a meghatározandó ismeretlen függvények: a $C(x,t)$: koncentráció, az $R(x,t)$: a törmelékgömbök sugara, valamint a $w(x,t)$: a törmelékgömbök süllyedési sebessége. Mindhárom függvény 2-változós, a törmelékes zóna kezdő időpontban elfoglalt felső peremétől mért x mélység, valamint a kezdő időponttól eltelt t idő függvényei.

A (29), (45) és (56) egyenletrendszer kezdeti feltételei a következők:

a. Ha $0 \le x < \infty$ és $t = 0$, akkor $R = R_0$, $C = 0$ és $w = 0$, mivel a kezdeti időpillanatban még nincs oldódás, csupán elindul lefelé felülről a beszivárgó oldószer.
b. Ha $x \to \infty$ és $t > 0$, akkor $R = R_0$, $C = C_e$ és $w = 0$, mert a kőzet felszíne alatt nagy mélységben a beszivárgó oldószer már telített.
c. Ha $x = 0$ és $t > 0$, akkor $C = 0$, mivel a törmelékes zóna felszínén a beszivárgó oldószer még nem tartalmaz oldott $CaCO_3$ anyagot.
Ha $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ határátmenetet képezünk, akkor a (29), (45) és (56) alkotta egyenletrendszer alakja a

$$
\begin{aligned}
& v \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \rho_{kő} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
(57) \qquad & \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \\
& -\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{C_e - C}{\rho_{kő}} \cdot \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

parciális differenciálegyenletbe megy át. Ezen egyenletrendszer egy, a differenciál- és integrálszámítás módszerein alapuló megoldását adta meg *SZUNYOGH* (1994).

A jövőben a (29), (45), (56), illetve a határátmenettel nyert (57) egyenletrendszerek elemi úton történő megoldását igyekszünk kidolgozni.

IRODALOM

BUDÓ, Á. (1972): Kísérleti fizika I. – Tankönyvkiadó, Budapest, 517. p.
DUBLJANSZKIJ, J. V. (1987): Teoreticseszkoje modelirovanije dinamiki formirovanija gidrotermokarsztovüh polosztyej – Metodi i izucsenyija geologicseszkih javlenyij, Novoszibirszk p. 97-111.
NERNST, W. (1904): Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen II. – Zeitschrift für Physikalische Chemie 47. p. 52-55.
PÉNTEK, K. (2001): Karsztosodó mészkő térszínek lepusztulásának matematikai modellje – Karsztfejlődés VI. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 13-25.
PÉNTEK, K. – VERESS, M. (2002): A karsztos lepusztulás sebességének kiszámítása egy törmelékes oldódási zóna adatainak felhasználásával –

Karsztfejlődés VII. BDF, Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 73-86.
SZUNYOGH, G. (1994): A horizontális karsztos lepusztulás folyamatának matematikai modellezése – A Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei IX. Természettudományok 4. Szombathely, p. 173-201.
VERESS, M. – PÉNTEK, K. (1990): Kísérlet a karsztos felszínek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.
VERESS, M. – PÉNTEK, K. (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.