

## **A TÖBRÖK MORFOMETRIAI OSZTÁLYOZÁSA\***

PÉNTEK KÁLMÁN<sup>1</sup> – VERESS MÁRTON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Berzsenyi Dániel Főiskola, Matematika Tanszék,  
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4. pentek@bdtf.hu  
<sup>2</sup>Berzsenyi Dániel Főiskola, Természetföldrajzi Tanszék,  
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4. vmarton@bdtf.hu

*Abstract: Solution dolines are typical surface features on karst terrain. Based on field surveys and detailed topographic mapping carried out by authors in the karst regions of Hungary, Austria, Croatia and Romania, their morphometry is characterised by area functions. After processing and statistically analysing the data, four doline types are identified from the parameters of the functions: 1) doline widening at rim and base; 2) doline widening at base; 3) doline widening at rim and 4) doline deepening but not widening.*

### **1. Bevezetés**

A karszterületek leírásának, genetikai és fejlődéstörténeti következtetések levonásának egyik lehetséges módját kínálják a morfometriai vizsgálatok. A felszíni karsztos formák, a dolinák morfometriai vizsgálatára nézve több módszert dolgoztak ki a témával foglalkozó kutatók.

*WILLIAMS* (1971, 1972a, 1972b) a dolinák előfordulási gyakoriságát, átlagos mélységét, irányát, elnyújtottságát, alaprajzának alakját, továbbá a dolina mélysége és alakja közti kapcsolatot tanulmányozta.

*JENNINGS* (1975) a perem alaprajza és mélysége, a dolinák egymás közti minimális távolsága és horizontális méretük, alakjuk, valamint mélységük közötti kapcsolatot vizsgálta.

A karsztos, dolinás térszínek jellemzésére *CLARK* et al. (1954) értelmezte a dolina sűrűséget és a legközelebbi szomszéd távolságát, *DRAKE* et al. (1972), *WILLIAMS* (1972a, 1972b) és *DAY* (1977, 1979) bevezette és vizsgálta a felszín érdekességének fogalmát.

A karsztos mélyedések függvénytanai eszközökkel történő leírását *VERESS* et al. (1987, 1988, 1989) és *PÉNTEK* et al. (2000) kezdték meg. A dolinák megnyúltságának és irányultságának vizsgálatára *FARSANG* et al. (1992) és *PÉNTEK* et al. (2000) dolgoztak ki módszereket.

A dolgozatban bemutatásra kerülő terepi felméréseket Magyarországon, Ausztriában, Horvátországban és Romániában végeztük, a feldolgozott

---

\* Készült a T 032381 OTKA támogatásával

töbrök együttes száma 222. Vizsgálataink során közép- és magashegységi fedetlen oldásos töbrökre szorítkoztunk, az összetett töbrök, uvalák elemzésétől eltekintettünk.

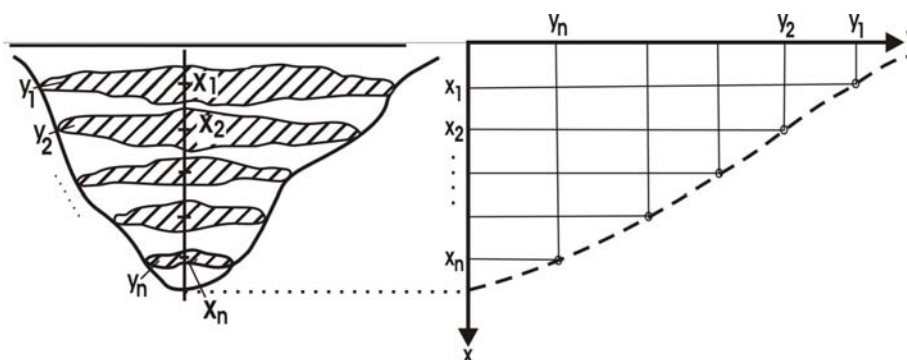
## 2. Elméleti megalapozás

### 2.1. A területfüggvény

Egy vizsgált karsztos térszín töbreiről felméréssel nagy méretarányú, szintvonalas térképeket készítünk. (A térképezés korábban hagyományos felméréssel, 2001 végétől GPS, mérőállomás, valamint a DIGITERRAMAP számítógépes program felhasználásával készült. Ezáltal lényegesen felgyorsult és hatékonyabbá vált a munka.) Helyi rendszerben a kezdő 0 szintnek tekintjük a töbrök körül elsőként nem záródó szintvonal síkját. Innen lefelé haladva sorban meghatározzuk a töbröt leíró szintvonalak által körülhatárolt  $y_k$  területeket a 0 szinttől mért  $x_k$  mélység függvényében. A záródó szintvonalak  $n$  számának megfelelő  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$  pontokhoz a regresszióanalízis alkalmazásával függvényt illesztünk. Ennek alakját a

$$(1) \quad t(x) = \pi \cdot \left( \frac{1}{M} \cdot \ln \frac{x}{L} \right)^{\frac{2}{K}} \quad (0 < x \leq L)$$

összefüggéssel adhatjuk meg, ahol  $L$ ,  $M$  és  $K$  az adott töbröt jellemző rögzített paraméterek (1. ábra). A  $t(x)$  függvényt a vizsgált töbr területfüggvényének nevezzük.

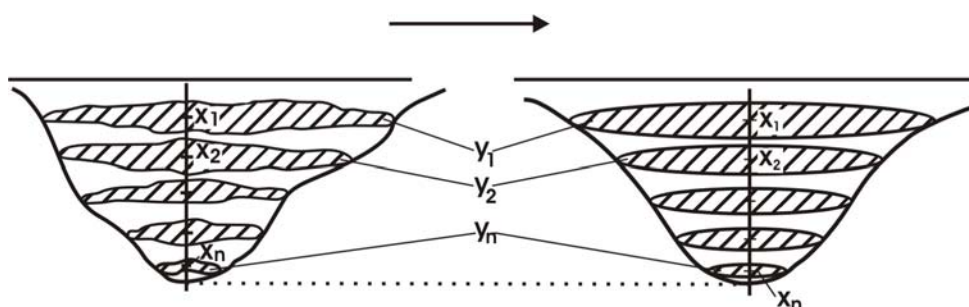


1. ábra: A területfüggvény  
Fig. 1 The area function

### 2.2. A meridiánfüggvény

Az  $L$ ,  $M$  és  $K$  paramétereknek szemléletes geometriai jelentése van. Ez akkor ismerhető fel, ha előbb a töbröt gondolatban átalakítjuk. Ezt a

transzformációt úgy végezzük, hogy a töbröt leíró minden záródó szintvonal által határolt területet területének megtartása mellett körrel helyettesítjük (2. ábra). Így a valóságos töbröt forgásszimmetrikussá alakítjuk, s miközben alakja ugyan megváltozik, térfogata viszont a Cavalieri elv alapján megmarad. Az így nyert alakzatot a kiindulási töbröhöz tartozó ideális töbröknek nevezzük.



2. ábra: A töbör transzformációja  
Fig. 2 Transformation of the doline

Ha az ideális töbör felületét forgástengelyén átmenő síkkal elszeljük, akkor a tengelytől kiindulva egy függvénygörbét kapunk. E függvény alakja a

$$(2) \quad \mu(x) = \left( \frac{1}{M} \cdot \ln \frac{x}{L} \right)^{\frac{1}{K}} \quad (0 < x \leq L) \quad ,$$

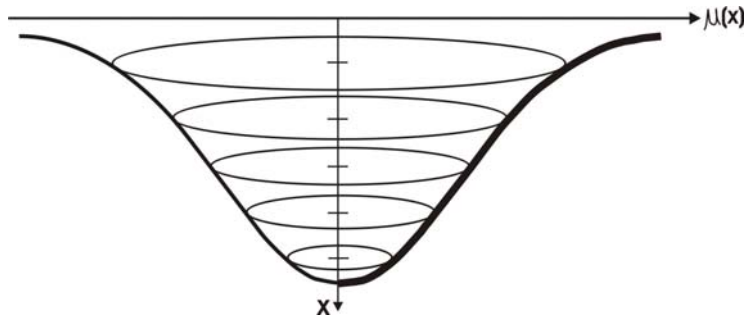
összefüggéssel írható le, ha a  $t(x)$  területfüggvényt az (1) szerinti formulával jellemeztük. Ezt a függvényt az ideális töbör meridiánfüggvényének nevezzük. Látható az is, hogy a meridiánfüggvény forgástengely körüli megforgatásával megkaphatjuk az ideális töbör felületét (3. ábra).

Az  $L > 0$  paraméter a töbör mélységét, tehát vertikális kiterjedését adja meg. Rögzített  $M$  és  $K$  értékek mellett, ha  $L$  kicsi, akkor a töbör sekély, ha  $L$  nagy, akkor a töbör mély (4. ábra).

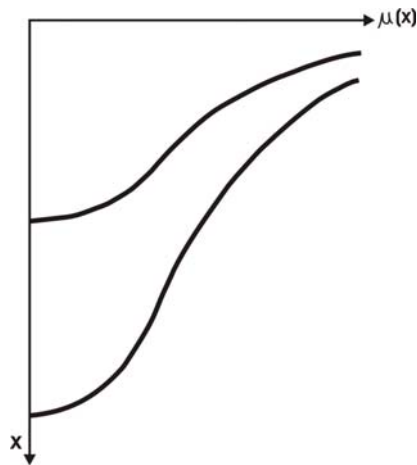
Az  $M < 0$  paraméter a töbör horizontális kiterjedését írja le. Rögzített  $L$  és  $K$  értékek mellett, ha  $M$  nagy negatív szám, akkor a töbör keskeny (kis átmérőjű), ha pedig  $M$  kicsiny negatív érték, akkor széles (nagy átmérőjű) (5. ábra).

A  $K \geq 1$  paraméter a meridiánfüggvény görbén a konvex és a konkáv íveket elválasztó inflexiós pont helyzetét jellemzi. Rögzített  $L$  és  $M$  értékek mellett, ha  $K$  nagy pozitív szám, akkor az ideális töbör oldalán a homorú lejtő aránya nagy a domború lejtőhöz képest. Minél inkább közelít

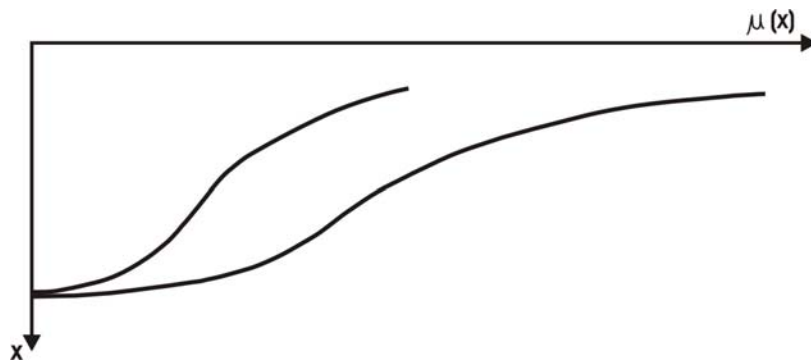
viszont  $K$  értéke az 1-hez, a homorú lejtő aránya annál kisebb a domborúhoz képest (6. ábra).



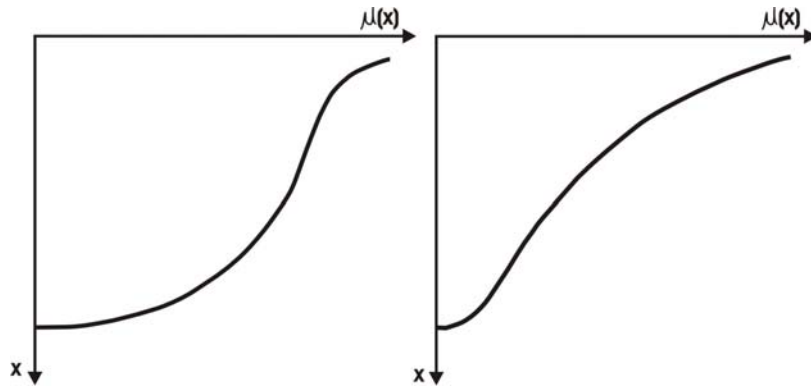
3. ábra: A meridiánfüggvény  
Fig. 3 The meridian function



4. ábra: Az  $L$  paraméter geometriai jelentése  
Fig. 4 The geometrical meaning of parameter  $L$



5. ábra: Az  $M$  paraméter geometriai jelentése  
Fig. 5 The geometrical meaning of parameter  $M$



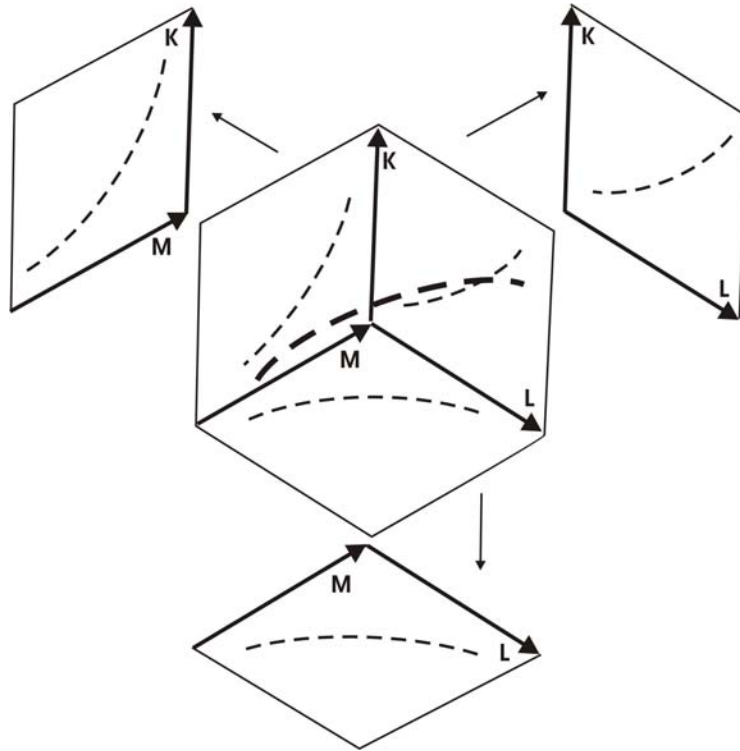
6. ábra: A  $K$  paraméter geometriai jelentése  
 Fig. 6 The geometrical meaning of parameter  $K$

### 2.3. A paraméterter

A vizsgált karsztos terület valamennyi töbrének az előzőekben bemutatott módon meghatározzuk a  $t(x)$  területfüggvényét. A karsztos területen található  $m$  számú töbr  $\{t_i(x)\}_{i=1}^m$  területfüggvényének mindegyikét az  $(L_i, M_i, K_i)$  paraméterek egy-egy értékhármasa jellemzi ( $1 \leq i \leq m$ ). A  $t_i(x)$  területfüggvénnyel leírt töbrhöz rendeljük hozzá egy térbeli Descartes-féle koordinátarendszerben az  $(L_i, M_i, K_i)$  koordinátákkal rendelkező pontot. A vizsgált karsztos területnek így megfelel egy  $m$  számú pontból álló ponthalmaz. Ezt a koordinátateret az elemzett karsztos terület  $\{L, M, K\}$  paraméterterének nevezzük. A karsztos terület töbreit a paraméterterben ábrázoló ponthalmaz a tapasztalatok szerint egy, az adott területre jellemző térgörbe, pontosabban egy térbeli sáv mentén helyezkedik el.

A paraméterteret síkban az egyes paraméterpárok síkbeli Descartes-féle koordinátarendszerben való ábrázolásával szemléltetjük. Így jutunk az  $\{L, M\}$ , az  $\{M, K\}$  és az  $\{L, K\}$  paramétersíkhöz.

Az egyes töbröknek növekedésük során  $L$ ,  $M$  és  $K$  paraméterei folyamatosan változnak az idő függvényében. Így a töbröt ábrázoló pont helyzete is változik a paraméterterben. Természetesen egy töbrnek több, akár mindhárom paramétere is változhat egyidejűleg. Speciálisan, ha csak a pont  $L$  paramétere nő, akkor a töbr mélyül, ha csak  $M (< 0)$  paramétere nő, akkor a töbr szélesedik, ha pedig csupán a  $K$  paramétere nő, akkor egyre tálszerűbb lesz a képződmény a fentiekkel összhangban (7. ábra).



7. ábra: Az  $\{L, M, K\}$  paraméterter  
 Fig. 7 The parameter space  $\{L, M, K\}$  and the specific curve of doline evolution

Ahhoz, hogy egy karszterület többre egyetlen fejlődési ívet reprezentáljanak, két elvet kell elfogadnunk.

- Azok a töbrök sorolhatók egy csoportba, amelyek egy morfológiai egységet képeznek. Ugyanazon morfológiai egységbe tartoznak azok a töbrök, amelyek azonos karsztosodási körülmények között képződnek (hasonló kőzetben, hasonló magasságban, hasonló klimatikus viszonyok között, egymás közelében, stb.).

- Egy karszterület töbör csoportjából azt tekintjük idősebbnek, amely lényegében azonosnak tekinthető karsztosodási feltételek mellett nagyobb vertikális kiterjedésű, vagyis amelynek az  $L$  paramétere nagyobb.

Az első feltétel természetesen annál kevésbé érvényesül, minél nagyobb karsztos terület töbreit soroljuk be egy csoportba. A csoport esetszámanak növelése érdekében azonban néha a területeket oly mértékben kényszerülünk növelni, hogy egy töbör csoportot egy teljes hegységből nyerünk. Ekkor azonban az egyes, összehasonlításra kerülő területek egymáshoz képest igen eltérő nagyságúak is lehetnek.

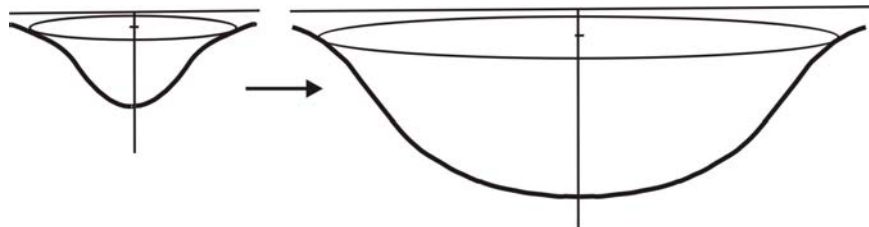
A fentieket összegezve megállapíthatjuk, hogy a genetikai egységként kezelhető karsztos területen levő különböző méretű töbrök alapvetően ugyanazon karsztos töbrőfejlődési folyamat egyes fázisait jelenítik meg. Ez azt jelenti, hogy egy töbör növekedése folyamán a töbröt a paramétertérben ábrázoló pont a karsztos terület töbreit megjelenítő ponthalmaz mentén vándorol. E vándorlás abba az irányba történik, amelyhez a fentiek szerint egyre nagyobb  $L$  értékek tartoznak.

#### 2.4. A töbrőtípusok

A fenti elvek elfogadásával végigkövethetjük egy töbör növekedésének folyamatát, s közben vizsgálhatjuk az  $L$ ,  $M$  és  $K$  paraméterek változását. Az  $L$  paraméter az idő függvényében mindig növekszik, így az  $M$  és  $K$  paraméterek változási irányai szerint négy fejlődési típus lehetséges.

##### a. Pereménél és aljzatánál szélesedő töbör

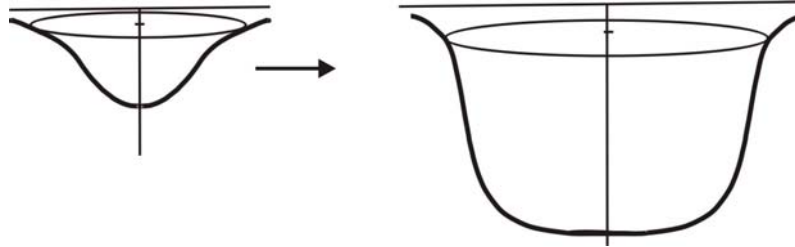
E típus jellemzői, hogy  $L$ ,  $M$  és  $K$  nő. A töbör növekedése során mélyülésével együtt jelentősen szélesedik is, miközben nő a homorú lejtő a domború lejtőhöz képest, a lejtő önmagával párhuzamosan nagymértékben hátrál és hosszabbodik. E típusba tartozó töbrök oldallejtőjének alsó része egyre lankásabb lesz. Az ilyen típusú dolina tehát a méretek növekedésével egyre inkább tál alakra hasonlít (8. ábra).



8. ábra: A pereménél és aljzatánál szélesedő töbör  
Fig. 8 Doline widening at rim and base

##### b. Aljzatánál szélesedő töbör

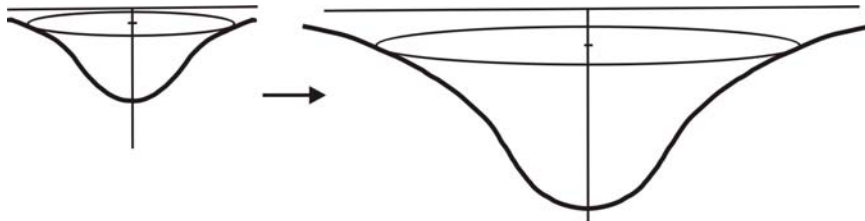
E típus jellemzői, hogy  $L$  nő,  $M$  csökken és  $K$  nő. A töbör fejlődése során elsősorban mélyül, horizontális terjeszkedése nem jelentős. Eközben ennél a típusnál is nő a homorú lejtő a domború lejtőhöz képest. A lejtő alsó része gyorsabban pusztul a felső részénél, meredekebbé válik és hosszabbodik. Ezért a töbör lejtője egyre meredekebb lesz, miáltal az aljzat síkká fejlődik (9. ábra). Javasolt elnevezés az aknatöbör.



9. ábra: Az aljzatánál szélesedő töbör  
Fig. 9 Doline widening at base

c. Pereménél szélesedő töbör

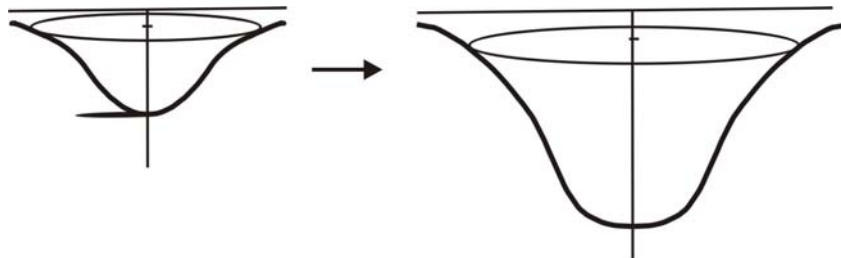
E típus jellemzői, hogy  $L$ ,  $M$  nő és  $K$  csökken. E töbör növekedése során elsősorban szélesedik anélkül, hogy jelentősen mélyülne. Eközben megnő a töbör oldalán a domború lejtő a homorú lejtőhöz képest, a lejtő ellankásodik és hosszabbodik, aljzata nem fejlődik síkká. (10. ábra)



10. ábra: A pereménél szélesedő töbör  
Fig. 10 Doline widening at rim

d. Mélyülő, nem szélesedő töbör

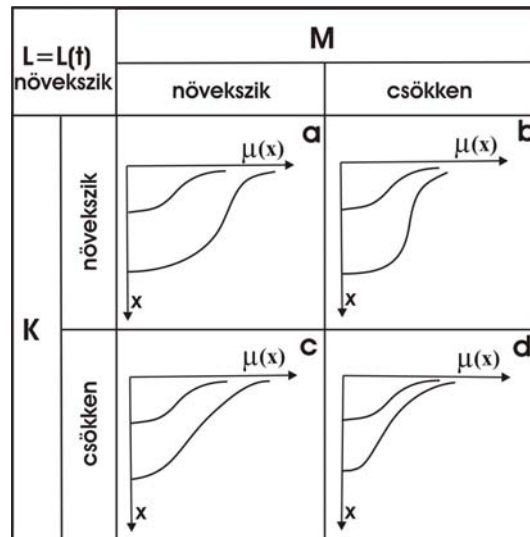
E típus jellemzői, hogy  $L$  nő,  $M$  és  $K$  csökken. A töbör fejlődése során gyakorlatilag csak mélyül érdemi szélesedés nélkül. E típus esetében is megnő a domború lejtő a homorú lejtőhöz képest, a lejtő egyre meredekebb lesz, hosszabbodik és csak kismértékben hátrál. A mélyülés következtében a töbör aljzata kis méretű lesz. E karsztos forma a méretek növekedésével egyre inkább egy kürtőre hasonlít (11. ábra).



11. ábra: A mélyülő, nem szélesedő töbör  
Fig. 11 Doline deepening but not widening



A karsztos mélyedések fenti tipizálását természetesen a valóságos töbörhöz tartozó forgásszimmetrikus ideális töbrön végeztük paramétereik elemzésével, azonban a valóságos töbrön is felismerhetők az egyes típusokhoz tartozó morfológiai jellemzők (12. ábra).



12. ábra: A töbörfejlődés lehetséges típusai: a. pereménél és aljzatánál szélesedő töbör, b. aljzatánál szélesedő töbör, c. pereménél szélesedő töbör, d. mélyülő, nem szélesedő töbör  
 Fig. 12 Alternative types for doline evolution: a. doline widening at rim and base, b. doline widening at base, c. doline widening at rim, d. doline deepening but not widening

### 3. Következtetések

Az oldásos töbrök fejlődésük kezdetén hasonló alakúak. A különböző töbrök különböző módon növekedhetnek. Ennek során elméletileg négy lehetséges alak jön létre. E négy alak kialakulása határoló lejtők fejlődésével értelmezhető. A töbör növekedése során a lejtő vagy ellankásodik, vagy meredekebb lesz, vagy önmagával párhuzamosan hátrál. Mindez a lejtő hosszabbodása mellett, vagy annak hiányában is bekövetkezhet. A vizsgált karszterületek töbrei a lehetséges négy közül három típusba sorolhatók (pereménél és aljzatánál szélesedő töbör, aljzatánál szélesedő töbör, pereménél szélesedő töbör).

### IRODALOM

CLARK, P. J.-EVENS F. C. (1954): Distance to nearest neighbour as a measure of spatial relationships in populations – Ecology 35, p. 445-453.

- DAY, M. J.* (1977): Surface roughness in tropical karst terrain – Proc. 7 Int. Spel. Cong. (Sheffield), p. 139-143.
- DAY, M. J.* (1979): Surface roughness as a discriminator of tropical karst styles – Z. Geomorph. Suppl. – Bd. **32**: p. 1-8.
- DRAKE, J. J.-FORD, D. C.* (1972): The analysis of growth patterns of two generation population: the example of karst sinkholes – Can. Geog. **16**: p. 381-384.
- FARSANG A.-M. TÓTH T.* (1992): Bükki dolinák morfológiai vizsgálata - A Bükk karsztja, vizei, barlangjai (konferencia kötet I.), Miskolci Egyetem; 39-50.
- JENNINGS J. N.* (1975): Doline Morphometry as a Morphogenetic Tool: New Zealand Examples - New Zealand Geog. **31**: p.6-28.
- PÉNTEK K.-VERESS M.-SZUNYOGH G.* (2000): Karsztos formák matematikai leírása függvényekkel - Hidr. Közl. **80**(4): p. 197-206.
- VERESS M.-PÉNTEK K.* (1987): Felszíni karsztos formák vizsgálata matematikai módszerekkel - Oktatási Intézmények Karszt- és Barlangkutató Tevékenységének II. Országos Tudományos Konferenciája, Szombathely; p. 21-24.
- VERESS M.-PÉNTEK K.* (1988): Kísérlet néhány bakonyi karsztos terület matematikai modellekkel történő leírására - BDTF Tudományos Közleményei VI. Természettudományok I. Szombathely; p. 179-203.
- VERESS M.-PÉNTEK K.* (1989): Cartographic Representation of the Extension of Karstification - 10. International Congress Speleology, Budapest, Proceedings I.; p. 162-164.
- WILLIAMS, P. W.* (1971): Morphometric analysis of karst with examples from New Guinea – Z. Geomorph **15**: p. 46-61.
- WILLIAMS, P. W.* (1972a): Morphometric analysis of polygonal karst in New Guinea – Geol. Soc. of America Bulletin
- WILLIAMS, P. W.* (1972b): The analysis of spatial characteristics of karst terrains – In: Spatial analysis in geomorphology, R. J. Chorley (ed) p. 136-163 London: Methuen