

**KARSZTOS VÍZFOLYÁSOKBAN KELETKEZŐ KIVÁLÁSI
FODROK MATEMATIKAI LEÍRÁSA
LAMINÁRIS ÁRAMLÁS ESETÉN**

PÉNTEK KÁLMÁN

Berzsenyi Dániel Főiskola, Matematika Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4. pentek@bdtf.hu

Abstract: We presents a mathematics model which describe the development of the calcareous sinter ripples if the current is laminar. We establish a formula, which can calculate distance of neighbouring calcareous sinter ripples. We analyse the relation which are the between the current and the development of the ripple.

1. Bevezetés

A túltelített karsztos vizekből az oldott anyagok kicsapódnak. A keletkező leggyakoribb és egyben legváltozatosabb formákban megjelenő kiválási anyag az édesvízi mészkő, áramló vizekből történő kiválás esetén ez a mésztufa.

A kicsapódás biogén és abiogén okokkal magyarázható. A vizes környezetben élő mohák fotoszintézisükkel csökkentik az áramló karsztos vízfolyásban az egyensúlyi széndioxid mennyiségét. Az egyensúlyi széndioxid mennyiségét csökkentheti, s így a túltelítettséget eredményezheti az áramlási viszonyok megváltozása, a víz egy részének elpárolgása, az áramlás turbulenciája miatti kiszellőzése, a hőmérséklet növekedése, valamint a nyomás csökkenése (BALOGH 1991, VERESS 2004).

A mésztufa legfontosabb formái a különböző felületeken keletkező bevonatok, gallérok, fodrok, kiválási foltok, fecskéfészkek, változatos alakú és méretű gátak, lépcsők, mésztufa kúpok és a forráskúpok (VERESS, 2004).

Ebben a dolgozatban a karsztos vízfolyásokban megjelenő fodrokkal, lamináris áramlási viszonyok között történő képződésük egy lehetséges matematikai modelljével foglalkozunk. Fodrokat a Bükk-fürdői medencékben figyeltünk meg, amelyek itt széleskörűen elterjedt képződmények. E fodrokkal analóg képződményeknek tekintjük a patakmedrek mésztufagátjait. Modellünket fodrokra fejlesztettük ki, de azt gondoljuk, hogy gondolatunk továbbfejlesztésével mésztufagátakra is alkalmazható lesz a jövőben.

A kiválási fodrok néhány centiméter magasságú, keresztmetszetben szimmetrikus, vagy aszimmetrikus alakú, felülnézetben egyenes, vagy hajladozó formák, amelyek lokálisan mindig a pillanatnyi áramlás irányára merőlegesen helyezkednek el. Nagy sűrűségben fejlődnek ki a kicsiny, vagy közepes vízmélységek esetén. A tapasztalatok szerint a szimmetrikus fodrok kicsiny, az aszimmetrikus fodrok nagyobb áramlási sebesség mellett jönnek létre (VERESS, 2004).

A karsztos kiválási fodrok alakja és sajátos periodikus elrendeződése sok tekintetben emlékeztet a folyók medrében keletkező közismert homokfodrokra. A homokfodrok alakjának, keletkezésének és vándorlásának matematikai tárgyalásában alapvető fontosságúak EXNER (1920, 1927) dolgozatai. Karsztos modellünk kidolgozása során Exner ezen munkáiban felvázolt ötletét igyekeztünk a kiválási formák keletkezésének sajátos folyamataira alkalmazni.

Eredményeink kis sebességek mellett létrejövő lamináris áramlási viszonyokra vonatkoznak. A turbulens áramlási körülmények között végbemenő kiválási formák vizsgálatával a jövőben kívánunk foglalkozni.

2. A hidrodinamikai modell

A karsztba jutott víz a kőzetet oldva az oldás körülményeire jellemző szinten telítődik, s ez a telített oldat jelenik meg a karsztforrások felszínre bukkanó vizében. Itt a megváltozott fizikai paraméterek hatására megkezdődik a karsztvízből az egyensúlyi széndioxid kilépése.

Feltételezzük, hogy a kicsapódó anyag kolloidális méretű részecskék formájában jelenik meg a vízben. E részecskék rátapadhatnak a felületekre, de mozoghatnak is az áramlásban. Ez utóbbit bizonyítja, hogy a karsztos vízfolyások medrének üledékeiben a mész nem csupán bevonat, hanem szemcsék formájában is előfordul.

A karsztos vízfolyásban haladó kolloidális méretű kivált részecskéknek egyedül a hőmozgás hatására a teljes statisztikai rendezetlenségnek megfelelő egyenletes térbeli eloszlását tapasztalnánk. Egyedül a gravitációs erőter hatására viszont statisztikailag olyan teljesen rendezett állapot jönne létre, amelyben a kivált részecskék mind a meder legalján helyezkednének el. A két, egyidejűleg fennálló, a hőmozgási rendezetlenséget előidéző és a nehézségi erőter rendező hatásának eredményeként alakul ki a részecskék Boltzmann-féle eloszlása. Eszerint a meder alján a legnagyobb, míg felfelé haladva egyre kisebb a kivált kolloidális méretű részecskék koncentrációja. Az adott fizikai és kémiai paraméterek egyértelműen meghatározzák a kiváló részecskék koncentrációját a mederfenéktől számított magasság függvé-

nyében. A részecskék ezen eloszlását leülepedési, vagy szedimentációs egyensúlynak nevezzük (BUDÓ 1972a).

Ha a mederfenéken levő akadály, mint helyi egyenetlenség hatására a fentiekben vázolt módon kialakult szedimentációs egyensúly megbomlik, akkor ennek hatására vertikális irányú rezgés keletkezik, amely a horizontálisan mozgó folyadékban transzverzális hullámmozgásként jelentkezik, amely viszont a mederhez képest nem mozdul el.

A meder alján e hullámmozgás hullámhosszára jellemző távolságokban a hullámhegyek alatt, ahol lokálisan lecsökken az áramlás sebessége, sávokban rakódnak le a kivált kolloidális méretű részecskék, amelyek e sávokban megkötődnek és a mederfenékhez kéregződnek. E periodikus, sávokban megjelenő bekéregződések növekedve alkotják a kiválási fodrokat, amelyek további fejlődése vezethet el a keresztgátak képződéséhez.

3. A matematikai modell

Tekintsük egy olyan vízfolyást, amelynek vízhozama időben állandó, a meder alzata sík, alakja a vizsgált szakaszon állandó. A karsztforrásban megjelenő vizet ideális inkompresszibilis folyadéknak tekintjük, amelynek áramlásáról feltesszük, hogy stacionárius és lamináris.

Modellünk leírásához rögzítsünk olyan Descartes-féle jobb sodrású koordinátarendszert, amelynek origója a meder alján helyezkedik el, x -tengelye a víz haladásának irányába, z -tengelye pedig felfelé mutat. Tegyük fel továbbá, hogy koordinátarendszerünk önmagával párhuzamosan a víz v áramlási segítségével halad, mintegy kísérve a vízrészecskék mozgását.

A kolloidális méretű mésztanyag-szemcsék leülepedési egyensúlya a mederfenéktől mért z magasság függvényében a

$$(1) \quad \rho_m(z) = \rho_1 \cdot e^{-\alpha z} \quad (\alpha > 0)$$

összefüggésnek tesz eleget, ahol ρ_1 a mésztufa sűrűsége és $\rho_m(z)$ a pillanatnyi sűrűség a z magasságban (BUDÓ 1972a).

Szemeljünk ki a vízfolyás vizéből egy V térfogatú és ρ sűrűségű térfogatelemet, amely a mederfenék felett z magasságban halad. A térfogatelem szilárd és folyékony fázisból tevődik össze. Mivel a kiváló mésztanyag sűrűsége a z magasság függvényében az (1) formulával írható le, így a V térfogatelem $0 < e^{-\alpha z} < 1$ -ed részét teszi ki a mésztufa szemcséinek szilárd fázisa, a maradék $0 < 1 - e^{-\alpha z} < 1$ -ed részt a folyadékfázist alkotó karsztvíz tölti ki. Ez utóbbit a z magasság függvényében a

$$(2) \quad \rho_v(z) = \rho_0(1 - e^{-\alpha z})$$

összefüggéssel írhatjuk le, ahol ρ_0 a víz sűrűsége. Ekkor a V térfogatelem teljes sűrűsége az (1) és a (2) felhasználásával a

$$(3) \quad \rho(z) = \rho_m(z) + \rho_v(z) = \rho_1 \cdot e^{-\alpha z} + \rho_0(1 - e^{-\alpha z})$$

formulával írható le.

A mederfenéken elhelyezkedő kiemelkedő akadály hatására emelkedjék meg a V térfogatelem egy $\rho' (< \rho)$ sűrűségű és $z' (> z)$ magasságba. Ekkor a térfogatelemre ható erők egyrészt a

$$(4) \quad G = -\rho \cdot V \cdot g$$

súlyerő, másrészt az

$$(5) \quad F_f = \rho' \cdot V \cdot g$$

felhajtóerő. Így a dinamika alapegyenlete szerint

$$(6) \quad m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_f + G = \rho' \cdot V \cdot g - \rho \cdot V \cdot g,$$

amelyből a

$$(7) \quad m = \rho \cdot V$$

összefüggés felhasználásával

$$(8) \quad \rho \cdot V \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = (\rho' - \rho) \cdot V \cdot g,$$

azaz

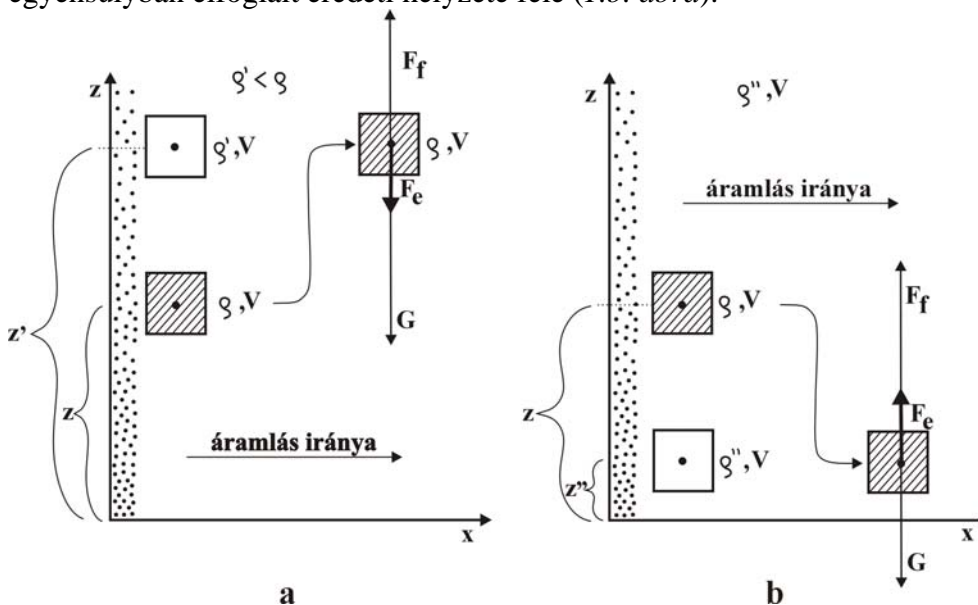
$$(9) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\rho - \rho'}{\rho} \cdot g$$

formulával jellemezhető lefelé irányuló gyorsulással téríti visszafelé kiemelkedett térfogatelemünket a ható erők eredője a leülepedési egyensúlyban elfoglalt helyzete felé (1.a. ábra).

Teljesen hasonló okfejtéssel, ha a meder alján kiemelkedő akadály helyett egy bemélyedés található, akkor a V térfogatelem lezökkenve egy $\rho'' (> \rho)$ sűrűségű és $z'' (< z)$ magasságú helyzetbe a

$$(10) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\rho - \rho''}{\rho} \cdot g$$

felfelé irányuló gyorsulással rendelkeznek. E gyorsulással igyekeznek visszafelé téríteni a ható erők eredője a besüllyedt térfogatelemünket a leülepedési egyensúlyban elfoglalt eredeti helyzetére felé (1.b. ábra).



1. ábra: A vizsgált térfogatelem vertikális mozgása a mederben
Fig. 1. Vertical movement of investigation volume element in the bed

Dinamikai szempontból a fentiekben vázolt, a szedimentációs egyensúlyt helyreállítani kívánó visszatérítő hatással magyarázható a transzverzális hullámok megjelenése.

Ezután a (9) egyenlet jobb oldalán szereplő relatív sűrűségváltozás mértékét határozzuk meg, ha a fentiekben vizsgált V térfogatelem a z magasságból a nála csak kis mértékben nagyobb $z' = z + \Delta z$ magasságba emelkedik. Ekkor egyszerű algebrai átalakításokkal

$$(11) \quad \rho - \rho' = [\rho_1 \cdot e^{-\alpha z} + \rho_0(1 - e^{-\alpha z})] - [\rho_1 \cdot e^{-\alpha z'} + \rho_0(1 - e^{-\alpha z'})] = \\ = (\rho_1 - \rho_0) \cdot (e^{-\alpha z} - e^{-\alpha z'}) = (\rho_1 - \rho_0) \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot \Delta z})$$

adódik. Kicsiny Δz esetén $-\alpha \cdot \Delta z$ is kicsi, s ekkor jó közelítéssel érvényes a

$$(12) \quad e^{-\alpha \Delta z} \approx 1 - \alpha \Delta z$$

összefüggés, amelynek a (11) formulába történő behelyettesítésével

$$(13) \quad \rho - \rho' = (\rho_1 - \rho_0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot \alpha \cdot \Delta z$$

adódik, ahonnan

$$(14) \quad \frac{\rho - \rho'}{\rho} = \frac{(\rho_1 - \rho_0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot \alpha \cdot \Delta z}{\rho_1 \cdot e^{-\alpha z} + \rho_0(1 - e^{-\alpha z})}$$

következik.

Alkalmazzuk most a (14) összefüggést a $z=0$ fenékszintről a $z = \Delta z$ magasságba felemelkedő térfogatelemre, ekkor

$$(15) \quad \frac{\rho - \rho'}{\rho} = \frac{(\rho_1 - \rho_0) \cdot e^{-\alpha \cdot 0} \cdot \alpha \cdot z}{\rho_1 \cdot e^{-\alpha \cdot 0} + \rho_0(1 - e^{-\alpha \cdot 0})} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha \cdot z$$

adódik. A (9) differenciálegyenlet ezen kicsiny fenékszintről induló vertikális kitérítés esetére a

$$(16) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha \cdot z,$$

vagy tömörebben a

$$(17) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 \cdot z$$

alakra hozható. A (17) összefüggés egy konstans együtthatós, homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása a közismert

$$(18) \quad z = A \cdot \cos \omega t + \beta \cdot \sin \omega t$$

alakban adható meg. Kezdeti feltételeink $t = 0$ esetén $z = 0$ és $\frac{dz}{dt} = v_0$, amelynek eleget tevő megoldás a

$$(19) \quad z = \frac{v_0}{\sqrt{g \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha}} \cdot \sin \sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha} \cdot t$$

formában adható meg (*BUDÓ* 1972b, *FRANK-MISES* 1966, 1967).

A (19) egyenlet alapján a vertikális folyadékrezgés periódusideje a

$$(20) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha}$$

felhasználásával

$$(21) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha}}$$

alakban írható fel.

EXNER (1927) áramlástanai vizsgálatai szerint az (1) összefüggésben szereplő α mennyiség

$$(22) \quad \alpha = \frac{\beta}{\rho_0 \cdot v^2}$$

alakú. Ekkor (21) a

$$(23) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \cdot \alpha}} = \frac{2\pi \cdot v}{\sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} \cdot \beta}}$$

alakot ölti.

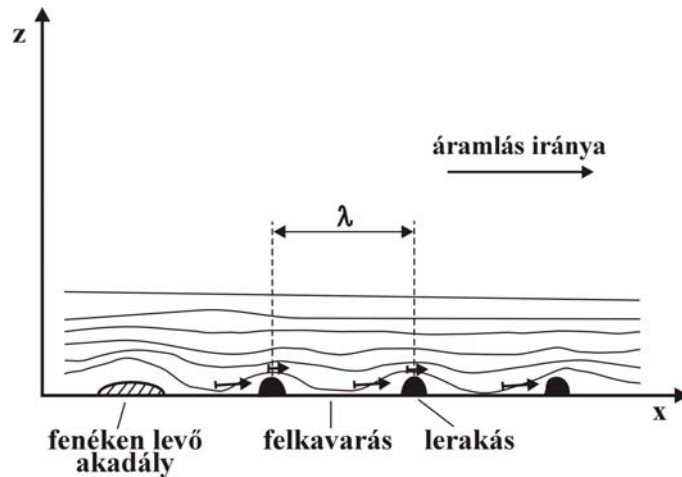
A mederhez rögzített megfigyelő számára a transzverzális rezgések tovahaladó transzverzális hullámként jelennek meg, amelynek λ hullámhosszára érvényes a

$$(24) \quad \lambda = v \cdot T = v \cdot \frac{2\pi \cdot v}{\sqrt{g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \cdot \rho_0} \beta}} = 2\pi \cdot v^2 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_0}{g(\rho_1 - \rho_0) \beta}}$$

összefüggés. A (24) képlete alapján pedig a szomszédos fodrok d távolsága

$$(25) \quad d = \lambda = 2\pi \cdot v^2 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_0}{g(\rho_1 - \rho_0) \beta}}$$

(2. ábra).



2. ábra: A fodrok képződésének elvi vázlatja
Fig. 2. The theory of the development ripples

Látható, hogy a szomszédos fodrok távolsága a karsztvíz áramlási sebességének négyzetével arányos. Ha tehát az áramlás sebessége kétszere-

sére nő, akkor a fodrok távolsága megnégyszereződik, feltéve természetesen, hogy az áramlás lamináris jellege megmarad.

A (25) formula alkalmazhatóságához ismerni kell az áramlás v sebességét, a mésztufa ρ_1 , valamint a karsztvíz ρ_0 sűrűségét.

EXNER (1927) kvarchomokból kialakuló fodrok analóg jelenségét vizsgálva úgy találta, hogy $\beta = 0,128 \text{ kg} / \text{m}^2 \text{ s}^2$. A (25) formula alkalmazhatóságához tapasztalati úton kalibrálni kell: d, v, ρ_1 és ρ_0 ismeretében mérésekkel meg kell határozni a β mennyiség értékét. E tapasztalati úton nyert β ismeretében v, ρ_1 és ρ_0 felhasználásával más áramlások vizsgálatánál a keresett d meghatározható.

I. táblázat
Table I.

A $d = d(v)$ függvény

The $d = d(v)$ function

$v[m/s]$	0,1	0,2	0,5	1
$d[m]$	0,08	0,32	2,01	8,05

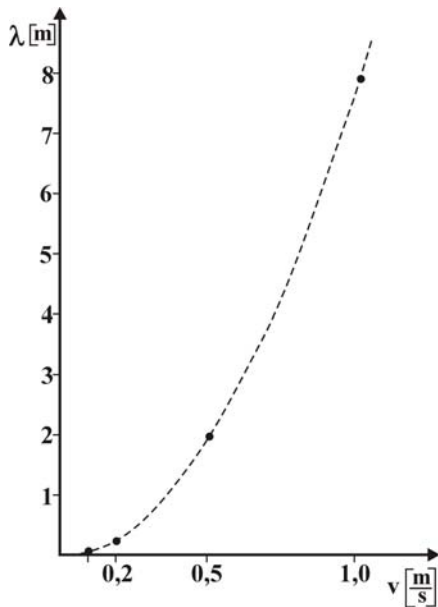
A fentiekben bemutatott elméleti levezetésünket egy gyakorlati számítással illusztráljuk. EXNER (1927) méréseit felhasználva, ha $\rho_0 = 1 \text{ kg} / \text{dm}^3$ a karsztvíz sűrűsége, $\rho_1 = 1,9 \text{ kg} / \text{dm}^3$ a mésztufa sűrűsége, akkor a (25) formula alapján a szomszédos kiválási fodrok d távolságát az áramlás v sebességének függvényében az I. táblázat adatai tartalmazzák. A táblázat adatait felhasználva a $d = d(v)$ függvényt a 3. ábra mutatja be. A II. táblázatban viszont $v = 0,1 \text{ m} / \text{s}$ áramlási sebesség mellett találhatjuk az áramló oldat ρ sűrűségét a fenéktől számított z magasság függvényében. E táblázat adatait felhasználva készült $\rho = \rho(z)$ függvényt a 4. ábrán láthatjuk.

II. táblázat
Table II.

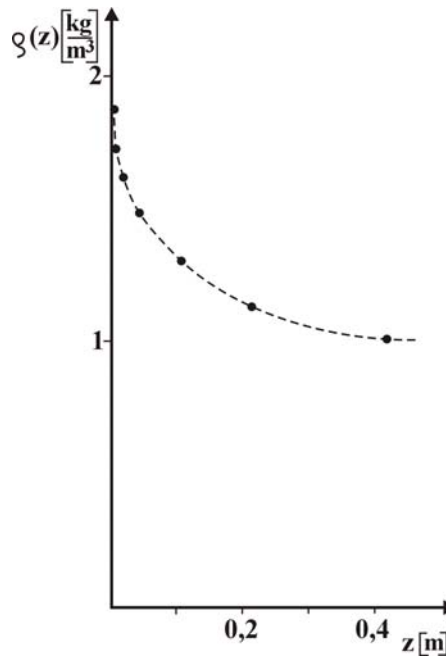
A $\rho = \rho(z)$ függvény $v = 0,1 \text{ m} / \text{s}$ áramlási sebességnél

The $\rho = \rho(z)$ function $v = 0,1 \text{ m} / \text{s}$ at current velocity

$z[m]$	0	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,4
$\rho[\text{kg} / \text{dm}^3]$	1,90	1,79	1,69	1,47	1,25	1,07	1,01



3. ábra: A $\lambda = \lambda(v)$ függvény
 Fig. 3. The $\lambda = \lambda(v)$ function



4. ábra: A $\rho = \rho(z)$ függvény
 Fig. 4. The $\rho = \rho(z)$ function

4. Összegzés

Dolgozatunkban a karsztos vízfolyások medrében megjelenő kiválási fodrok matematikai modelljét vázoltuk fel lamináris áramlási viszonyok között. Meghatároztuk a fodrok legszembetűnőbb metrikus jellemzőjét, a szomszédos fodrok távolságát. Megvizsgáltuk, hogy e távolság hogyan függ az áramlás sebességétől, a túltelített oldatban a kolloidális méretű részecskék formájában megjelent mésztufa sűrűségétől, végül a szállító karsztvíz sűrűségétől. Fontos feladatunk a bemutatott elméleti formulák kalibrálása a gyakorlatban, az egyes paraméterek numerikus meghatározása, végül a modell vizsgálata és finomítása turbulens áramlások esetére is.

Köszönetnyilvánítás

Tisztelettel és szeretettel adózom édesapám, Péntek Kálmán (1923-1999) emlékének, aki engem gyermekként a természet szeretetére megtanított. Hálával és köszönettel tartozom neki, hogy F. Exner (1920, 1927) felhasznált dolgozatainak szakszerű fordításával és szövegértelmezésével nagyban hozzájárult jelen dolgozat megszületéséhez. Requiescat in pace...

IRODALOM

- BALOGH K.* (1991): Szedimentológia I. - Akadémiai Kiadó, Bp., p. 423
BUDÓ Á. (1972a): Kísérleti fizika I. - Tankönyvkiadó, Bp., p. 439.
BUDÓ Á. (1972b): Mechanika. - Tankönyvkiadó, Bp., p. 184.
EXNER, F. (1920): Zur Physik der Dünen. Sitzber. - Akad. Wiss. Wien Math. nat. Kl. II. p. 929-952.
EXNER, F. (1927): Über Dünen und Sandwellen. - Geografiska Annaler 9. p. 81-99.
FRANK, PH. – MISES, R. (1966, 1967): A mechanika és a fizika differenciál- és integrálegyenletei. - I.-II. Műszaki Könyvkiadó, Bp., p. 349.
VERESS M. (2004): A karszt – BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 215.