

TALAJNÉLKÜLI LEJTŐS MÉSZEKŐFELSZÍNEK LEOLDÓDÁSI IDEJÉNEK ELMÉLETI VIZSGÁLATA

SZUNYOGH GÁBOR

Berzsényi Dániel Főiskola, Fizika Tanszék, 9700 Szombathely, Károlyi
Gáspár tér 4. szgabor@bdtf.hu

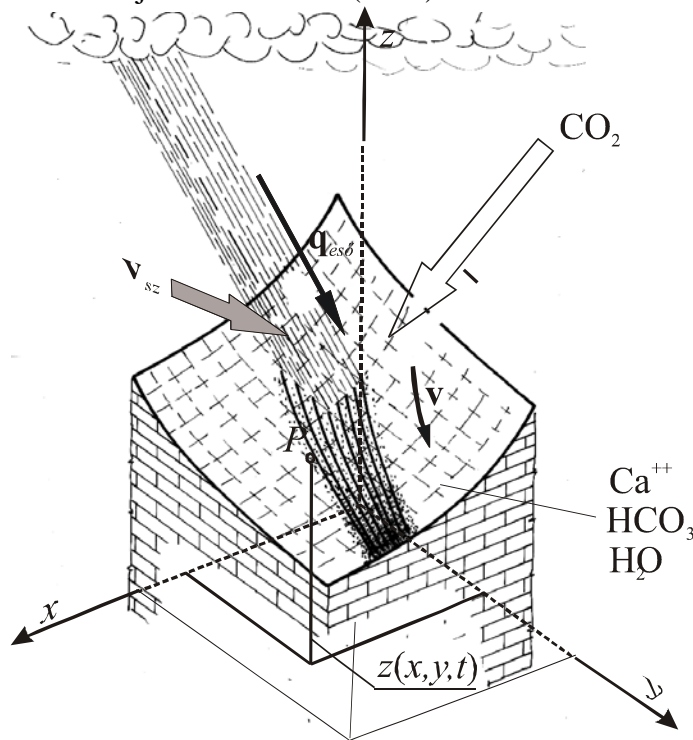
Abstract: The paper deals with the question how the duration of karstic denudation on open, sloping limestone surface without soil cover and plane at the outset depends on the dip angle of the area, the yearly amount of precipitation, the intensity of the rains, and on prevailing wind direction and speed. The answer is given by the solution of a differential equation system describing the sinking speed of the rock surface. It turns out that the speed of denudation does not increase in proportion to the intensity of precipitation and can never exceed a maximal value; long, quiet rains result in yearly greater denudation than short, abundant downpours; with increasing speed of wind the speed of dissolution increases also, but above a certain wind speed dissolution does not become faster. The lecture exemplifies with numerical calculations and diagrams how these factors affect the expectable duration of denudation.

Előzmények

Terepi vizsgálatok során gyakran felmerül az a kérdés, hogy vajon egy adott, lejtős mészkőfelszín mennyi idő alatt pusztulhatott le a karsztkorrózió eredményeképpen. E probléma különösen lényeges azokon a területeken, melyek a geológiai közelmúltban még eljegesedett állapotban voltak, ui. alapvető kérdés, hogy egy-egy karsztforma már a jégkorszak előtt, vagy csak a gleccserek visszavonulása után jött-e létre. A válasz attól függ, hogy a vizsgált karsztos terület lepusztulásához elegendő-e a pleisztocén óta eltelt idő.

E kérdés eldöntése rendszerint bizonytalan talajon áll, annál is inkább, mert bizonyos tényezők (a terület kitétsége, a csapadék mennyisége és intenzitása, a szél iránya és nagysága, a felszín dőlése, stb.) jelentős különbségeket eredményezhetnek a lepusztulási időben. Ismeretes, hogy több karsztkutató csoport végez rendszeresen méréseket a lepusztulás sebességének „*in situ*” meghatározására. Létrejöttük módozatait, morfológiájukat, elterjedésüket régóta, igen széles körben kutatják (JAKUCS 1971, FORD-WILLIAMS 1989, BALÁZS, 1990, VERESS 1995, KLIMCHOUK et. al. 2000, stb). Bár valamennyi elképzelés kvalitatíve figyelembe veszi azt a tényt, hogy szoros kapcsolat van a mészkő oldódásának üteme, a víz áramlási tulajdonságai és ezen keresztül a terület lejtésviszonyai között, kvantitatív összefüggéseket nem fogalmaztak meg. Magam, bekapcsolódva a Berzsényi Dániel Főiskola Természetföldrajz Tanszékének karrosodást

kutató munkájába, támaszkodva a mészkő oldódáskinetikájának DREYBRODT (1989) által megadott egyenleteire elkészíttem e lepusztulás fajta matematikai modelljét SZUNYOGH (2000).



1. ábra. A vizsgált modell felépítése
Fig.1: The structure of the model

A felszínfejlődés egyenletei a szél sebességének és az esőnapok számának figyelembevételével

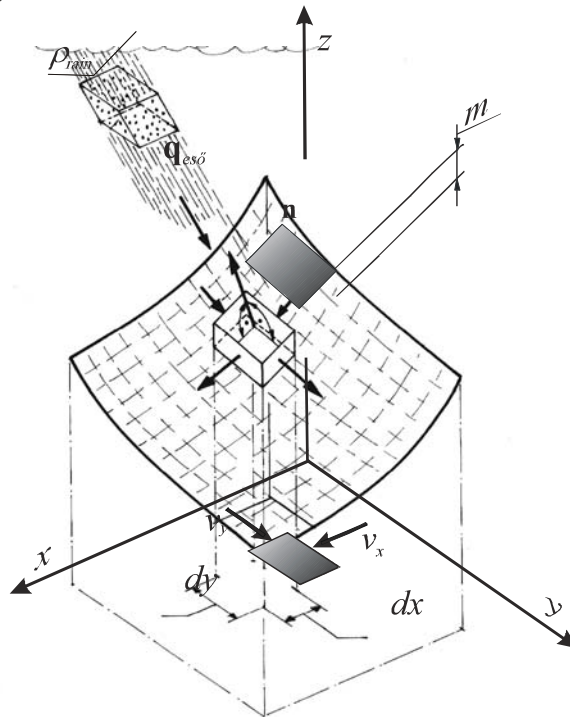
A modell alapját a szabad (talaj nélküli) mészkőfelszínnek lepusztulásának általános egyenletrendszere képezi, mely célul tűzi ki a kőzet felületét megadó

$$z = f(x, y, t) \quad (1)$$

függvény meghatározását, ahol z a felület tengerszín feletti magassága, x és y a felület pontjainak vízszintes koordinátái, t az idő (1. ábra). A kőzetre hulló szénsavas esővíz feloldja a mészkövet, ezért felületének alakja állandóan változik. Süllyedési sebességét a

$$w = -\frac{\partial z}{\partial t} \quad (2)$$

differentiálhányadosként értelmezhetjük. (A mínusz előjel kifejezi, hogy a karsztos lepusztulás következtében a térszín süllyed, azaz az idő múlásával $z(x,y,t)$ csökken.)



2. ábra. Vázlat a tömegmegmaradás tételének alkalmazásához
Fig.2: Illustration of how the law of mass conservation is used

A felszín alakjának ill. süllyedési sebességének meghatározásához a modell az alábbi törvényt veszi figyelembe:

1. **Tömegmegmaradás tétele a vízre vonatkozólag.** Jelöljünk ki képzeletben a mészkő felszínére illeszkedő kicsiny térfogatot (2. ábra). Oldalai legyenek függőleges helyzetűek, párhuzamosok az x és y tengelyekkel, szélességük dx és dy . Magassága egyezzen meg a kőzet felszínén szivárgó víz mélységével, fedőlapja pedig essen egybe a víz felszívásával. A tömegmegmaradás tétele szerint e térfogatba oldalain és fedőlapján át időegység alatt befolyó víz tömege megegyezik a belőle eltávozó víz tömegével, mely matematikailag a

$$\frac{\partial(mv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(mv_y)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_v} \frac{\mathbf{q}_{es\acute{o}} \cdot \mathbf{n}}{\cos \alpha} \quad (3)$$

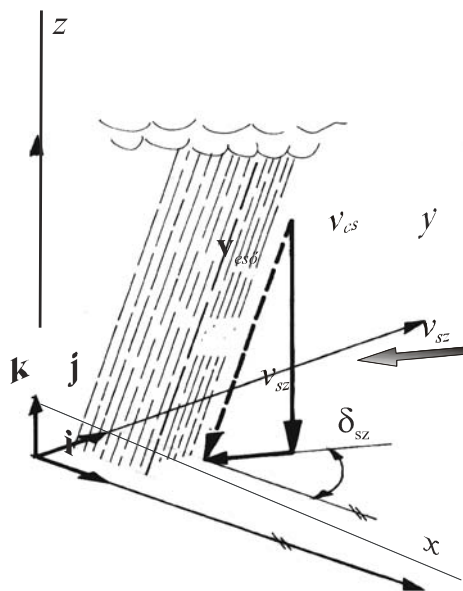
egyenlettel fejezhető ki, ahol ρ_v a víz sűrűsége, $m(x,y,t)$ a mészkövön szivárgó vékony vízréteg mélysége, $v_x(x,y,t)$ és $v_y(x,y,t)$ az áramló víz sebességvektorának x és y irányú komponensei, $\mathbf{q}_{es\ddot{o}}$ az egységnyi területre hulló esővíz tömegáramsűrűsége, \mathbf{n} a mészkő felületének normálvektora (mely a közet belsejéből kifelé mutat), α a mészkőfelszín dőlésszöge. (α -nak nem tulajdonítunk előjelet: $0 < \alpha < 90^\circ$. Fizikailag $\alpha < 0^\circ$ értelmetlen, hiszen a víz nem folyhat felfelé). m , v_x és v_y egyelőre ismeretlenek. $\mathbf{q}_{es\ddot{o}}$ előállítható az esőcseppek $\mathbf{v}_{es\ddot{o}}$ sebességvektorának és az egységnyi térfogatban lévő esőcseppek $\rho_{es\ddot{o}}$ össztömegének szorzataként:

$$\mathbf{q}_{es\ddot{o}} = \rho_{es\ddot{o}} \mathbf{v}_{es\ddot{o}} \quad (4)$$

Az esőcseppek sebességének vízszintes komponense a terület felett fúvó szél v_{sz} sebességéből, függőleges összetevője pedig a cseppek (levegőhöz viszonyított) v_{cs} süllyedési sebességéből tevődik össze (3. ábra). Jelölje δ_{sz} a szél irányszögét az x tengelyhez viszonyítva. (A szél iránya alatt azt az irányt értjük, ahonnan fúj a szél. $0 \leq \delta_{sz} \leq 360^\circ$.) Ezek szerint

$$\mathbf{v}_{es\ddot{o}} = -v_{sz} \cos \delta_{sz} \mathbf{i} - v_{sz} \sin \delta_{sz} \mathbf{j} - v_{cs} \mathbf{k}, \quad (5)$$

tehát
$$\mathbf{q}_{es\ddot{o}} = -\rho_{es\ddot{o}} v_{sz} \cos \delta_{sz} \mathbf{i} - \rho_{es\ddot{o}} v_{sz} \sin \delta_{sz} \mathbf{j} - \rho_{es\ddot{o}} v_{cs} \mathbf{k}. \quad (6)$$



3. ábra. Az esőcseppek mozgásának megadása
Fig.3: The movement of raindrops

$\rho_{es\ddot{o}}$ meghatározásához használjuk fel az évi csapadékhozam definícióját: $Q_{\acute{e}vi}$ megadja, hogy egy év alatt összesen mekkora térfogatú csapadékvíz kerül egy vízszintesen elhelyezett egységnyi területre. E vízmennyiség másfelől egyenesen arányos az eső tömegáramsűrűségének függőleges komponensével, azaz

$$\rho_v Q_{\acute{e}vi} = \rho_{es\ddot{o}} v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}, \quad (7)$$

ahol t_{napi} jelenti az esők napi összidejét, $N_{\acute{e}vi}$ pedig az év napjainak számát. A (7)-ből $\rho_{es\ddot{o}}$ -t kifejezve nyerjük, hogy

$$\rho_{es\ddot{o}} = \frac{\rho_v Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}}. \quad (8)$$

A (3) jobb oldalán szereplő \mathbf{n} és $\cos \alpha$ előállítható a kőzetfelület alakját megadó függvény parciális deriváltjainak segítségével

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

és

$$\cos \alpha = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

A (6), (8), (9) és (10) kifejezéseket a (3)-ba helyettesítve végül a tömegmegmaradás tételére a

$$\frac{\partial(mv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(mv_y)}{\partial y} = \frac{Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} v_{sz} \cos \delta_{sz} - \frac{\partial z}{\partial y} v_{sz} \sin \delta_{sz} + v_{cs} \right) \quad (11)$$

egyenletet kapjuk. A (11) kapcsolatot teremt a mészkő felszínén szivárgó víz sebessége, mélysége, a lejtő dőlésszöge, valamint a szél sebességének iránya és nagysága között.

2. A *Navier-Stokes egyenlet*. Hidraulikai számítások szerint a mészkő felszínén a víz igen vékony leplet alkotva lamináris, súrlódó folyadékként szivárog lefelé, ezért a Navier-Stokes egyenlet értelmében parabolikus sebességprofil jellemzi (4. ábra). A sebesség átlaga a keresztmetszet mentén

$$v = \frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \sin \alpha, \quad (12)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás, η a víz dinamikai viszkozitási tényezője, h pedig a folyadékfilm vastagsága. h és m között egyszerű kapcsolat áll fenn:

$$h = m \cos \alpha . \quad (13)$$

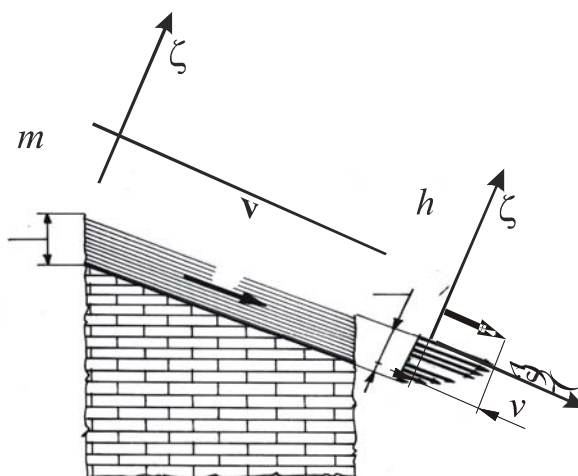
A víz a mészkőfelszín esésvonalainak mentén folyik, ezért sebességvektorának irányát a felület gradiense határozza meg. Képezve $z(x,y)$ megfelelő parciális deriváltjait, adódik, hogy

$$v_x = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (14)$$

és

$$v_y = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (15)$$

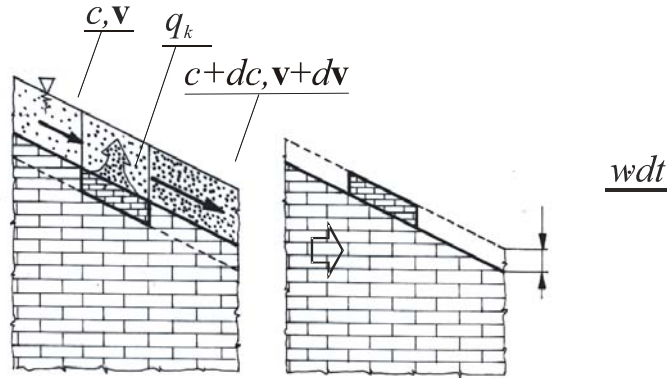
(A mínusz előjel kifejezi, hogy ha a mészkő felülete az x ill. y tengelyek irányába haladva emelkedik, azaz z parciális deriváltjai pozitívak, akkor a víz „visszafelé”, azaz negatív x ill. y irányba folyik.)



4. ábra. A víz sebességprofilja a folyadékfilmben
Fig.4: The velocity profile of water in a thin water layer

3. *Kapcsolat feloldott CaCO_3 tömege és a kőzetfelület süllyedési sebessége között.* Minthogy a csapadék a légköri széndioxidnak köszönhetően agresszív, ezért a mészkövet oldja (5. ábra). Felszíne tehát süllyed, melynek sebessége:

$$w = \frac{q_k}{\rho_k \cos \alpha} \quad (16)$$



5. ábra. Kapcsolat a feloldott mészkő tömege, a felszín süllyedése és a víz koncentráció-változása között
Fig.5: The relationship between the amount of dissolved limestone, the lowering of the surface and the concentration change of the water

4. A reakciókinetika alapegyenlete szerint az oldódás annál gyorsabb, minél nagyobb a különbség a víz c_e telítési- és c tényleges kalcium-karbonát koncentrációja között. Az oldatba jutó mészkő tömegáram-sűrűsége ezzel a különbséggel arányos (GABROVŠEK, 2000):

$$q_k = \begin{cases} k(c_e - c), & \text{ha } c \leq c_s, \\ k_n(c_e - c)^n, & \text{ha } c \geq c_s. \end{cases} \quad (17)$$

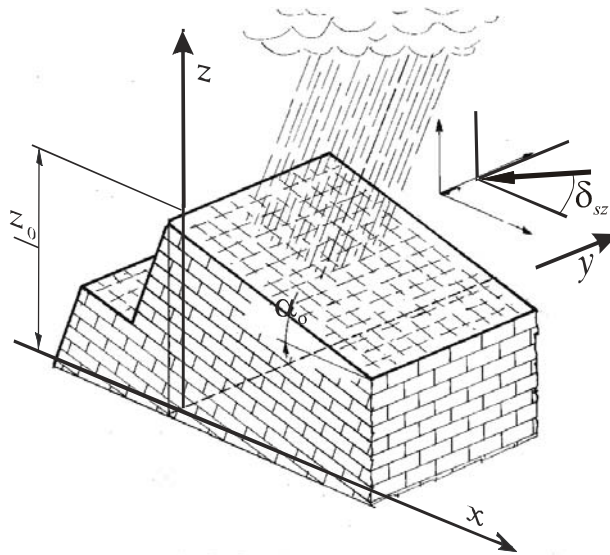
ahol k ill. k_n az oldódás sebességi állandói, $n \approx 4$, $c_s \approx 0,9 \cdot c_e$. c_e és k számértéke a víz hőmérsékletétől és a levegő széndioxid-tartalmától függő állandók (DREYBRODT, 1988). Kiderült, hogy a jelen modell szerint c mindig kisebb, mint c_s , így a továbbiakban elegendő a (17) kifejezés felső egyenletét venni figyelembe.

5. A tömegmegmaradás tétele a CaCO_3 -ra. A tömegmegmaradás tétele érvényes külön a kalcium-karbonátra is (lásd. a 6. ábrát). Eszerint a fent már ismertetett képzeletbeli térfogat oldalain keresztül (oldott állapotban) időegység alatt eltávozó ill. beérkező CaCO_3 tömegének különbsége megegyezik a mészkő felületéről oldatba jutó CaCO_3 tömegével. Képletben

$$\frac{\partial(mv_x c)}{\partial x} + \frac{\partial(mv_y c)}{\partial y} = \frac{q_k}{\cos \alpha} \quad (18)$$

A (2), (10), (11), (13), (14), (15), (16) (17) és (18) egyenletrendszer ismeretleneinek (z , α , m , h , v_x , v_y , w , q_k és c) száma 9, tehát elvileg megoldható. Az egyenletek független változói az x és y térkoordináták,

valamint a t idő. Segítségével — ismerve a mészkőfelület kezdeti alakját — meghatározhatjuk, hogy milyen alakúvá válik a terület egy tetszőleges későbbi időpontban, illetve adott mértékű lepusztulás mennyi idő alatt fog lejátszódni.



6. ábra. Kezdetben egyenletes lejtő modelljének vázlata
Fig.6: Illustration of the initially plane slope model

Kezdetben állandó dőlésű sziklafelszín leoldódásának törvényszerűségei

Jelen cikkben a karsztos lepusztulás azon esetével foglalkozunk, amikor a mészkő felszínét kezdetben egy, az x -tengely irányába lejtő, α_0 dőlésszögű síkfelület képezi, tehát a felületet megadó függvény y -től függetlennek tekinthető (6. ábra). Ennek következtében a fenti egyenletekben előforduló y -szerinti parciális deriváltak nullává válnak, felület alakját megadó z függvény x -szerinti deriváltja pedig a lejtő dőlésszögével arányos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tg} \alpha . \quad (19)$$

(A mínusz előjel arra utal, hogy a mészkő felszíne növekvő x -ek esetén csökken.) Mindezeket figyelembe véve a (10) – (18) egyenletek (megfelelő matematikai átrendezéseket követően) az alábbi alakot öltik

$$v_x = \frac{\rho_v g m^2}{3\eta} \sin \alpha \cos^3 \alpha, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (m v_x) = \frac{Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}} (\operatorname{tg} \alpha \cos \delta_{sz} v_{sz} + v_{cs}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial (m v_x c)}{\partial x} = \frac{k}{\cos \alpha} (c_e - c), \quad (22)$$

$$w = \frac{k}{\rho_k} \frac{c_e - c}{\cos \alpha}. \quad (23)$$

Kezdeti- és peremfeltételül az alábbi kifejezések szolgálnak:

$$z(x, t)|_{t=0} = z_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot x. \quad (24)$$

$$v_x(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \text{és} \quad m(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (25)$$

Adottnak tekintjük z_0 , α_0 , δ_{sz} , v_{sz} , v_{cs} , k , c_e , ρ_k , η és g értékét. Keresett $w(x, t)$ és $z(x, t)$.

Helyettesítsük v_x -et a (20)-ból a (21)-be:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_v g m^3}{3\eta} \sin \alpha \cos^3 \alpha \right) = \frac{Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}} (\operatorname{tg} \alpha \cos \delta_{sz} v_{sz} + v_{cs}). \quad (26)$$

Lokalizáljuk a (26)-ot a leoldódás kezdeti időpillanatára, amikor $t=0$. Modellünk szerint ebben a pillanatban a mészkő felszínének alakja még sík, dőlésszöge (α_0) állandó, tehát x -től független. Ezt kihasználva (figyelembe véve a (25) peremfeltételt) a (26) zárt alakban integrálható:

$$m(x, t)|_{t=0} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{3 \eta}{\rho_v g} \frac{\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \frac{Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}}} x. \quad (27)$$

Megállapíthatjuk, hogy a mészkő felszínén szivárgó víz vastagsága a leoldódási folyamat kezdetén a lejtő tetejétől mért távolság köbgyökével arányos. A (27)-ből m -et a (20)-ba írva végül a szivárgó víz sebességére

$$v_x(x, t)|_{t=0} = \frac{\rho_v g}{3\eta} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \left[\frac{3 \eta}{\rho_v g} \frac{\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \frac{Q_{\acute{e}vi}}{v_{cs} t_{napi} N_{\acute{e}vi}}} x \right]^{\frac{2}{3}} \quad (28)$$

összefüggést nyerjük.

Helyettesítsük m -et és v_x -et a (22)-be. Hosszadalmas, de elemi átrendezések után a következő differenciálegyenletet nyerjük a $c(x)$ függvényre:

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) \frac{Q_{évi} x}{v_{cs} t_{napi} N_{évi}} \frac{dc}{dx} = \\ & = kc_e - c \left[k + \frac{Q_{évi}}{v_{cs} t_{napi} N_{évi}} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

A (29) változói szerint szétválasztható:

$$\frac{(\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) \frac{Q_{évi}}{v_{cs} t_{napi} N_{évi}} dc}{kc_e - c \left[k + \frac{Q_{évi}}{v_{cs} t_{napi} N_{évi}} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) \right]} = \frac{dx}{x}, \quad (30)$$

melyet integrálva

$$\begin{aligned} c(x, t) \Big|_{t=0} &= \frac{k}{k + \frac{Q_{évi}}{v_{cs} t_{napi} N_{évi}} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})} c_e + \\ &+ A \cdot x \frac{\frac{kv_{cs} t_{napi} N_{évi} + Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}{Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}} \end{aligned} \quad (31)$$

kifejezéshez jutunk, ahol A egy integrációs állandó. Mivel a megoldás jobb oldalának második tagja $x \rightarrow 0$ esetén ∞ -hez, ezért a (31) csak abban az esetben rendelkezhet reális fizikai tartalommal, ha $A=0$. Tehát

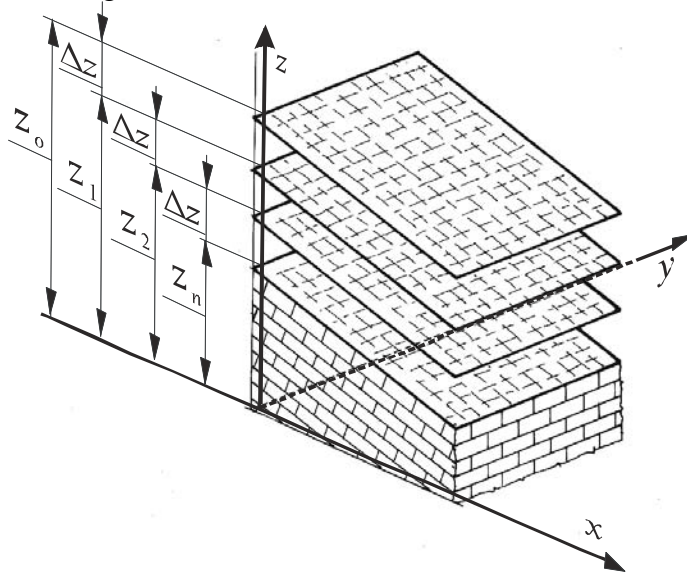
$$c(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{kv_{cs} t_{napi} N_{évi}}{kv_{cs} t_{napi} N_{évi} + Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})} c_e. \quad (32)$$

A mészkőfelszín süllyedési sebességét megkapjuk, ha c -t a (23)-ba helyettesítjük:

$$w(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{k}{\rho_k} \frac{c_e}{\cos \alpha_0} \frac{Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}{kv_{cs} t_{napi} N_{évi} + Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}. \quad (33)$$

Mínthogy a kifejezés jobb oldala x -től független, ezért kezdetben a mészkőfelszín valamennyi pontja azonos sebességgel süllyed, azaz önmagával párhuzamosan tolódik el. Ennek viszont igen fontos

következménye van: ha a kőzet felülete kezdetben sík volt, akkor később is az marad. Ha viszont a mészkő felülete később is α_0 dőlésszögű sík, akkor a (27), (32) és (33) összefüggések nem csak a $t=0$ pillanatra érvényesek, hanem bármely későbbi időre is, azaz w térben és időben állandó (7. ábra). Hasonlóképpen a (32) szerint x -től független a felszínen szivárgó víz koncentrációja is. Ez azt jelenti, hogy dinamikus egyensúly alakul ki a friss csapadékvíz higító- és az odódás koncentráció-növelő hatása között.



7. ábra. Kezdetben sík felszínű mészkőszikla alakja az idő függvényében
Fig.7: The shape of the initially plane limestone surface as a function of time

A (33) kifejezés számszerű értéke nem ad közvetlen információt a mészkőfelszín hosszú idő alatt bekövetkező, átlagos süllyedési sebességéről, mert a (33) csak arra az időszakra érvényes, amikor esik az eső. A felület egy év alatt bekövetkező összes süllyedése a (33) által kifejezett időegység alatti süllyedés és az évi csapadékos időszakok összidejének szorzata:

$$w_{\text{évi}} = \frac{dz}{dt} t_{\text{napi}} N_{\text{évi}}, \quad (34)$$

$$\text{tehát } w_{\text{évi}} = \frac{k}{\rho_k} \frac{c_e}{\cos \alpha_0} \frac{Q_{\text{évi}} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) t_{\text{napi}} N_{\text{évi}}}{k v_{cs} t_{\text{napi}} N_{\text{évi}} + Q_{\text{évi}} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}. \quad (35)$$

Számításokhoz célszerű bizonyos átváltási számokat beépíteni annak érdekében, hogy a gyakorlatban használatos mértékegységekben

helyettesíthessük be a paramétereket. Jelölje $S_{óra}$ az óra — másodperc, M_{mm} a milliméter — méter átszámítási kulcsot. Ezekkel

$$w_{évi} = \frac{k}{\rho_k} \frac{c_e}{\cos \alpha_0} \frac{Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) t_{napi} S_{óra} N_{évi} M_{mm}}{k v_{cs} t_{napi} S_{óra} N_{évi} + Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}. \quad (36)$$

A felszín alakját a (2) integrálásával nyerjük, mely igen könnyen elvégezhető, hiszen bal oldalán szereplő w a fent írottak értelmében állandó:

$$z(x, t) = z_0 - w_0 t - \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot x. \quad (37)$$

A (36) a mészkőfelszín függőleges irányú elmozdulásának sebességét adja. Felmerülhet azonban az a kérdés is, hogy adott idő alatt milyen vastagságú réteg „hántolódik le” a kőzetről. Könnyen belátható, hogy évente

$$\dot{b}_{évi} = w_{évi} \cdot \cos \alpha_0 \quad (38)$$

vastagságú szelet távozik.

Végül megadjuk egy karsztosodó lejtő Δz mértékű lepusztulásához szükséges Δt időt:

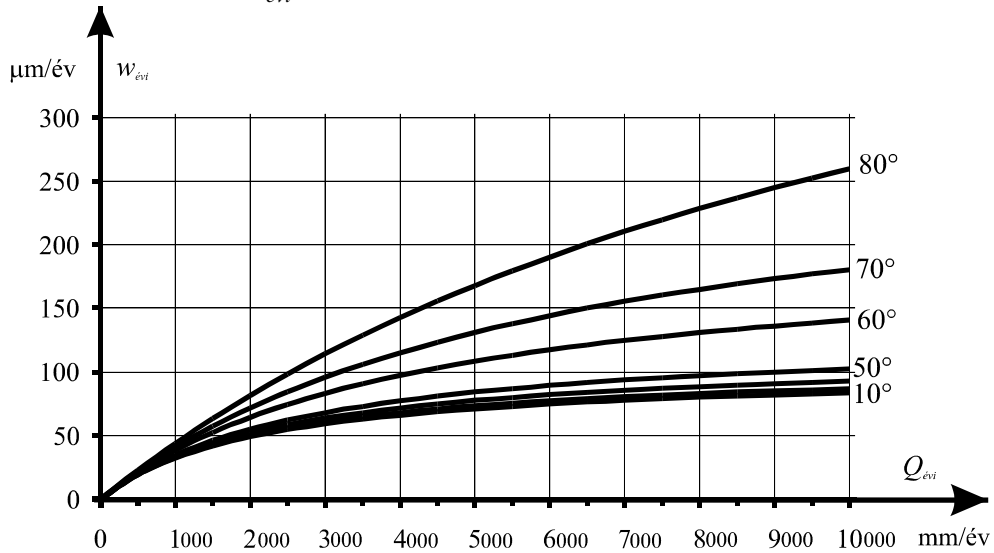
$$\Delta t = \frac{\rho_k \cos \alpha_0}{k} \frac{k v_{cs} t_{napi} N_{évi} + Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs})}{c_e Q_{évi} (\sin \alpha_0 \cos \delta_{sz} v_{sz} + \cos \alpha_0 v_{cs}) t_{napi} S_{óra} N_{évi} M_{mm}} \Delta z. \quad (39)$$

A levezetett összefüggések kvalitatív és kvantitatív vizsgálata

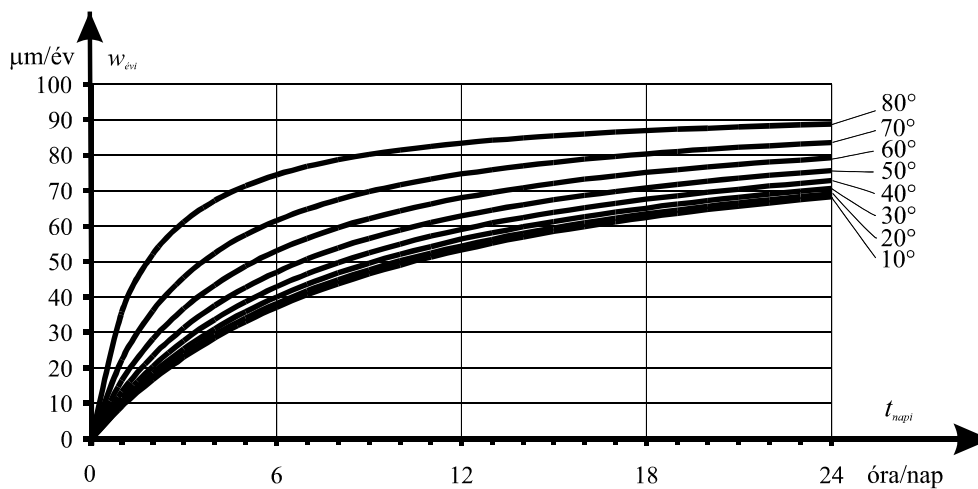
Az összefüggésekben szereplő paraméterek értéke a következő: A víz dinamikai viszkozitási tényezője $\eta=1,9 \cdot 10^{-3}$ kg/m·s; a mészkő sűrűsége $\rho_k = 2300$ kg/m³; a nehézségi gyorsulás $g=9,81$ m/s². Szabad légköri széndioxid-tartalom és $T=5^\circ$ C esetén az oldódás sebességi tényezője $k=3,2 \cdot 10^{-7}$ m/s, a vízben maximálisan feloldható kalcium-karbonát koncentrációja pedig $c_e=0,0546$ kg/m³ (DREYBDODT-EISENLOHR 2000). Az esőcseppek süllyedési sebessége $v_{cs}=3-8$ m/s (BUDÓ 1972). Az átszámítási kulcsok számadatai: $N_{évi}=365$ nap/év, $S_{óra}=3600$ s/óra, $M=1000$ mm/m.

A 8. ábra mutatja a lepusztulás sebességét az éves csapadékhozam függvényében, különböző lejtőszögek esetén ($t_{napi}=10$ óra/nap működési idő mellett). Látható, hogy $Q_{évi}=2-6000$ mm/év eső esetén a süllyedés sebessége 50-150 mm ezer évenként. Kiderül, hogy a meredekebb lejtők süllyedése

gyorsabb, mint a lankásaké. Figyelemre méltó, hogy $Q_{\text{évi}}$ növekedésével nem nő lineárisan $w_{\text{évi}}$.



8. ábra. A felszín süllyedési sebessége az éves csapadékhozam függvényében ($t_{\text{napi}}=10$ óra/nap, $v_{\text{sz}}=0$ m/s)
 Fig.8: The lowering speed of the surface as a function of the annual precipitation. ($t_d=10$ hours/day, $v_w=0$ m/s)

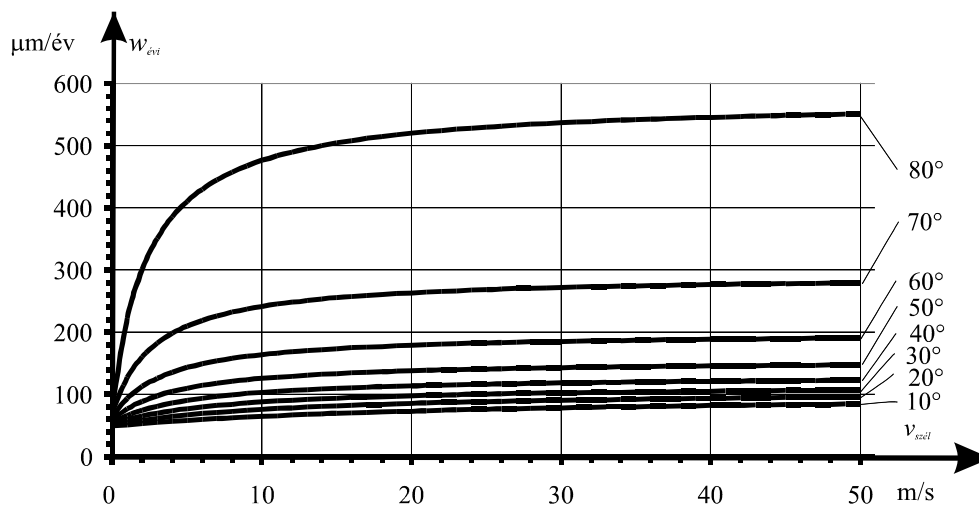


9. ábra. A felszín süllyedési sebessége a napi esős órák függvényében függvényében ($Q_{\text{évi}}=2000$ mm/év, $v_{\text{sz}}=0$ m/s)
 Fig.9: The lowering speed of the surface as a function of the daily rainfall hours ($Q_a=2000$ mm/year, $v_w=0$ m/s)

A 9. ábra $w_{\text{évi}}$ -t a napi esős órák függvényében ábrázolja állandó ($Q_{\text{évi}}=2000$ mm/év csapadékhozam mellett). Szembeötlő, hogy a lepusztulás annál gyorsabb, minél hosszabb ideig esik. Ez arra utal, hogy ha ugyanaz a csapadékmennyiség rövid de heves záporok formájában hullik, akkor a

lepusztulás viszonylag csekély, de ha lassú, csendes esőként öntözi a mészkövet, akkor a denudáció nagyobb lesz. E különös jelenség azzal magyarázható, hogy bár a bőséges esők vize (a működés ideje alatt) több CaCO_3 -at oldanak fel, de az esők elmúltával hosszú ideig nem történik korrózió.

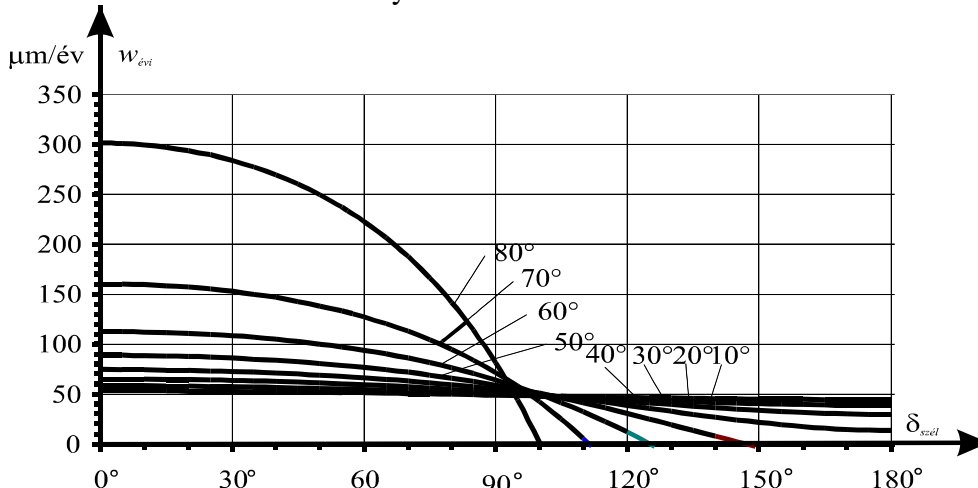
A 10. ábra a lepusztulás sebességét a terület felett fúvó szél függvényében szemlélteti (állandó $Q_{\text{évi}}$ és t_{nap} mellett). Látható, hogy a szél növeli a lepusztulás ütemét. A növekedés — természetesen — annál nagyobb mértékű, minél meredekebb a lejtő, azaz minél nagyobb a lejtő szélnek kitett felülete. De az is látszik, hogy a szél sebességének növekedésével nem egyenletesen nő $w_{\text{évi}}$, hanem egy aszimptotához tart. Azaz egy bizonyos érték felett a szél sebességének növekedésével már gyakorlatilag nem növekszik a süllyedés mértéke.



10. ábra. A felszín süllyedési sebessége a szél sebességének függvényében ($Q_{\text{évi}}=2000 \text{ mm}/\text{év}$, $t_{\text{nap}}=10 \text{ óra}/\text{nap}$, $\delta_{\text{szi}}=2 \text{ m}/\text{s}$)
 Fig.10: The lowering speed of the surface as a function of the wind speed ($Q_a=2000 \text{ mm}/\text{year}$, $t_a=10 \text{ hours}/\text{day}$)

A 11. ábra a szél irányának szerepét érzékelteti (állandó $Q_{\text{évi}}$, t_{nap} és v_{szi} mellett). Feltűnő, hogy a leoldódás sebessége mennyire érzékeny a lejtő kitétségének irányára. Legnagyobb a lepusztulás, ha a szél a lejtővel szembe fúj. A szél irányának elfordulásával $w_{\text{évi}}$ egyre csökken, majd $\delta_{\text{szi}} > 90^\circ$ esetén (azaz amikor már „hátról” fúj a szél) a denudáció sebessége rohamosan csökkenni kezd, sőt, a lejtő dőlésszögétől függően nullává is válhat. Ez egyben magyarázatot ad a szélviharokkal gyakran érintett területek különleges karros formavilágának kialakulására is (VERESS, et. al.

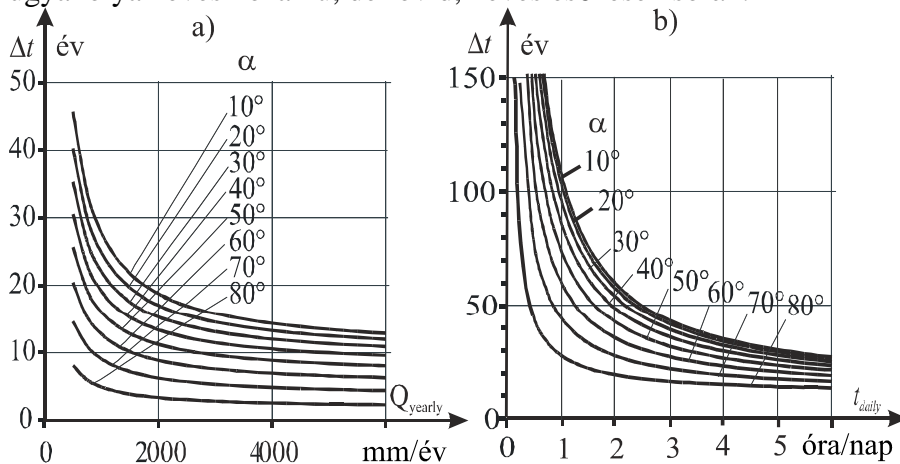
2003), ahol a képződmények elhelyezkedése egyértelmű összefüggésbe hozható az uralkodó széliránnyal.



11. ábra. A felszín süllyedési sebessége a szél irányának függvényében ($Q_{\text{évi}}=2000$ mm/év, $t_{\text{nap}}=10$ óra/nap és $v_{\text{sz}}=2$ m/s)

Fig.11: The lowering speed of the surface as a function of the wind direction ($Q_a=2000$ mm/year, $t_d=10$ hours/day and $v_w=2$ m/s)

A 12.a ábra szerint 1 mm kőzetréteg leoldódásához szükséges idő csökken az évi csapadékhozam növekedésével, de egy bizonyos határ alá soha sem kerülhet. A 12.b ábra pedig arra utal, hogy adott mértékű korrózióhoz kevesebb idő kell hosszú időtartamú, csendes esők esetén, mint ugyanolyan éves hozamú, de rövid, heves esőzések során.



12. ábra. 1 mm kőzetréteg leoldódásához szükséges idő a) az éves csapadékhozam függvényében ($t_{\text{nap}}=10$ óra/nap, $v_{\text{sz}}=0$ m/s), b) a napi esős órák függvényében függvényében. ($Q_{\text{évi}}=2000$ mm/év, $v_{\text{sz}}=0$ m/s)

Fig.12: The time necessary for the corrosion of a 1 mm thick rock layer as a function of a) the annual precipitation ($t=10$ hours/day, $v=0$ m/s), b) the daily rainfall hours ($Q=2000$ mm/year, $v=0$ m/s)

A diagramok bizonyítják, hogy a bemutatott elmélet modell számszerű eredményei összhangban vannak a terepi mérési tapasztalatokkal: számításaink szerint $w_{\text{évi}}=50 - 300 \mu\text{m}/\text{év}$, ami beleesik a szakirodalom által magadott 50-500 $\mu\text{m}/\text{év}$ tartományba (*HIGH-HANNA* 1970, *WHITE* 2000).

Összefoglalás

A levezetett elméleti modell szerint a kezdetben állandó dőlésszögű, sík mészkőfelszín a csapadék hatására úgy pusztul le, hogy dőlésszöge később is ugyanakkora marad, azaz a mészkő felszíne önmagával párhuzamosan tolódik lefelé. A denudáció sebessége a csapadékkintenzitással nem növekszik arányosan, azaz ha ugyanaz az éves csapadékmennyiség hosszantartó, csendes esőként hullik le, akkor a mészkőfelszín évi süllyedése nagyobb, mintha rövid, heves záporok formájában érkezne. A képletek a csapadékhullás idején fúvó szél sebességének irányát és nagyságát is figyelembe veszik. A szélnek kitett, lejtős sziklaoldalokon a szél sebességével nő a leoldódás sebessége, de egy bizonyos értéket nem haladhat meg, bármekkora is legyen a szél. A sziklán szivárgó lepelvíz koncentrációja a lejtő mentén állandó (dinamikus egyensúlyban van). A sziklafelszín lepusztulásának sebességére 50-300 $\mu\text{m}/\text{év}$ adódik reális csapadékhozamok esetén.

IRODALOM

- BUDÓ, Á.* (1971): Kísérleti fizika I. – Tankönyvkiadó, Budapest, 517.p.
- DREYBRODT, W.* (1988): Processes in Karst Systems. Physics, Chemistry and Geology. – Springer, Berlin, New York, Heidelberg, 294. p.
- DREYBRODT, W.-EISENLOHR, L.* (2000): Limestone dissolution rates in karst environments. – in.: Speleogenesis. Evolution of Karst Aquifers. – Funkwille
- FORD, W.-WILLIAMS, P.* (1989): Karst geomorphology and hydrology. – Unwin Hyman, London, England, 601.p.
- GABROVŠEK, F.* (2000): Evolution of Early Karst Aquifers: from simple principles to complex models. – Inštitut za raziskovanje ZRC SAZU, Založba ZRC. 150.p.
- HIGH, C.-HANNA, F. K.* (1970): A method for the direct measurement of erosion on rock surfaces. – British Geomorphological Research Group Technical Bulletin, no. 5, 24 p.

- KLIMCHOUK, -FORD, D.C.-PALMER, A. N.-DREYBROT, W.* (2000): Speleogenesis. – Evolution of Karst Aquifers. – Funkwille
- PLUMMER, T.-WIGLEY, T.-PARKHURST, D.* (1978): The dissolution of calcite on CO₂-water systems at 5° to 60°C and 0.0 to 1.0 atm CO₂, – American journal of science, 278. p. 179-795
- SZUNYOGH, G.* (2000): Differential Equations Describing the Changes Of Shape Caused by Karst Corrosion of any Arbitrary Limestone Surface— Karsztfejlődés IV. p. 151-174.
- SZUNYOGH, G.* (2000): The Theoretical-Physical Study of the Process of Karren Development— Karsztfejlődés IV. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely p. 125-150.
- VERESS, M.* (1995): Karros folyamatok és formák rendszerezésének szempontjai Totes-Gebirge-i példák alapján. – Karsztfejlődés I. Pauz Kiadó, Szombathely. p. 7-31
- VERESS, M.-ZENTAI, Z.-TÓTH, G.-CZÖPEK, I.* (2003):Karsztos felszínfejlődési típusok Diego de Almagro szigetén (Chile). – Karsztfejlődés VIII. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely. p. 213-231.
- WHITE, W. B.* (2000): Dissolution of limestone from field observations. in: Speleogenesis. Funkwille, p. 149-155