

KARSZTOSODÓ MÉSZKŐ TÉRSZÍNEK LEPUSZTULÁSÁNAK EGY ÚJABB MATEMATIKAI MODELLJE

PÉNTEK KÁLMÁN

Berzsényi Dániel Főiskola, Matematika Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi G. tér 4. pentek@deimos.bdtf.hu

Abstract: The paper presents the mathematical description of the horizontal karstification process, which occurs in the zone of cubical debris of surface of limestone.

1. Bevezetés

Jelen dolgozat a szerző által korábban publikált munka szerves folytatásának tekinthető (PÉNTEK 2001). Az említett dolgozatban a horizontális karsztosodás egy lehetséges matematikai modellje került kifejtésre. Itt a tényleges karsztos oldás a talajjal borított mészkő térszín felső, törmelékes oldódási zónát képező tartományában folyik. A talajrétegen átszivárgó csapadékvíz széndioxiddal feldúsul, s a karsztos oldás számára agresszív oldószert képez. A kőzet felső tartományába beszivároghatva kifejti oldó hatását, miközben lefelé haladva fokozatosan telítődik. A törmelékes oldási zóna felső tartománya oldódik legnagyobb ütemben, s e feloldódó tartomány a szálkőzetből alulról pótlódik. Adott oldási körülmények között az ezekre jellemző vastagságú törmelékes zóna fejlődik ki. A törmelékes zóna a fentiekben vázolt oldás hatására lefelé tolódik el, ami a karsztos térszín süllyedését eredményezi (VERESS-PÉNTEK 1990, 1996).

E geomorfológiai modellt követő matematikai modell kifejtésekor tökéletes, geometriai értelemben vett gömb alakú törmelékkel dolgoztunk. Most ismertetendő modellünkben ideális kocka alakú, tehát poliéderez, síklapokkal határolt törmelékdarabokkal számolunk. A felesleges ismétlések mellőzésével igyekszünk modellünket ismertetni, bár a korábbi dolgozatokkal kikerülhetetlen átfedések és analóg gondolatsorok fordulnak elő. Modelljeink építési folyamata természetesen sohasem tekinthető véglegesen lezártnak. Tárgyalásunk során a lehető legegyszerűbb eszközöket igénylő felépítésre törekedtünk. Szorosan e témához kapcsolódik még VERESS-PÉNTEK (1990, 1996), PÉNTEK (1998), továbbá SZUNYOGH (1994) munkája.

2. A karsztos lepusztulás kocka-modellje

A törmelékzónát eredményező horizontális karsztos oldódás kifejtésre kerülő matematikai modelljénél az alábbi idealizáló feltevést fogalmazzunk meg.

a. Feltesszük, hogy a karsztosodó mészkő felső tartományában a repedések rendszere olyan ekvidisztáns párhuzamos síkrendszert alkot három, páronként egymásra merőleges irányban, hogy az egyik síkrendszer horizontális irányú. E síkok rendszere egybevágó, a élhosszúságú kockák rendszerére bontja fel e felső tartományt.

b. Feltételezzük, hogy a kőzetbe szivárgó agresszív oldószer hatására e kockák a kocka alakot megtartva oldódnak úgy, hogy a kockák geometriai középpontjának helyzete nem változik. E törmelékkockák fokozatosan feloldódó rendszere alkotja az ideális törmelékes oldódási zónát. Az oldódó kőzetszemcsék középpontjainak egymástól mért távolsága a modell szerint azért lehet állandó, mert a mészkő felett elhelyezkedő talaj- ill. agyagréteg oldhatatlanságánál fogva állandó térfogatú, így állandó pakolást biztosít a benne lévő szemcséknek.

c. Feltesszük még, hogy az ideális törmelékes zónában található törmelék-kockák a élhossza jóval kisebb a zóna d vastagságánál. E kockák élhossza alulról, a zárt kockamozaik kitöltéstől indulva, fölfelé haladva fokozatosan csökken és tart a nullához, azaz a kockák teljes feloldódásához.

d. Feltételezzük azt is, hogy az oldódási zónán átszivárgó oldószer C kalciumkarbonát koncentrációja a zóna felső szélétől való x mélység függvényében egy egyszerű lineáris függvénnyel írható le:

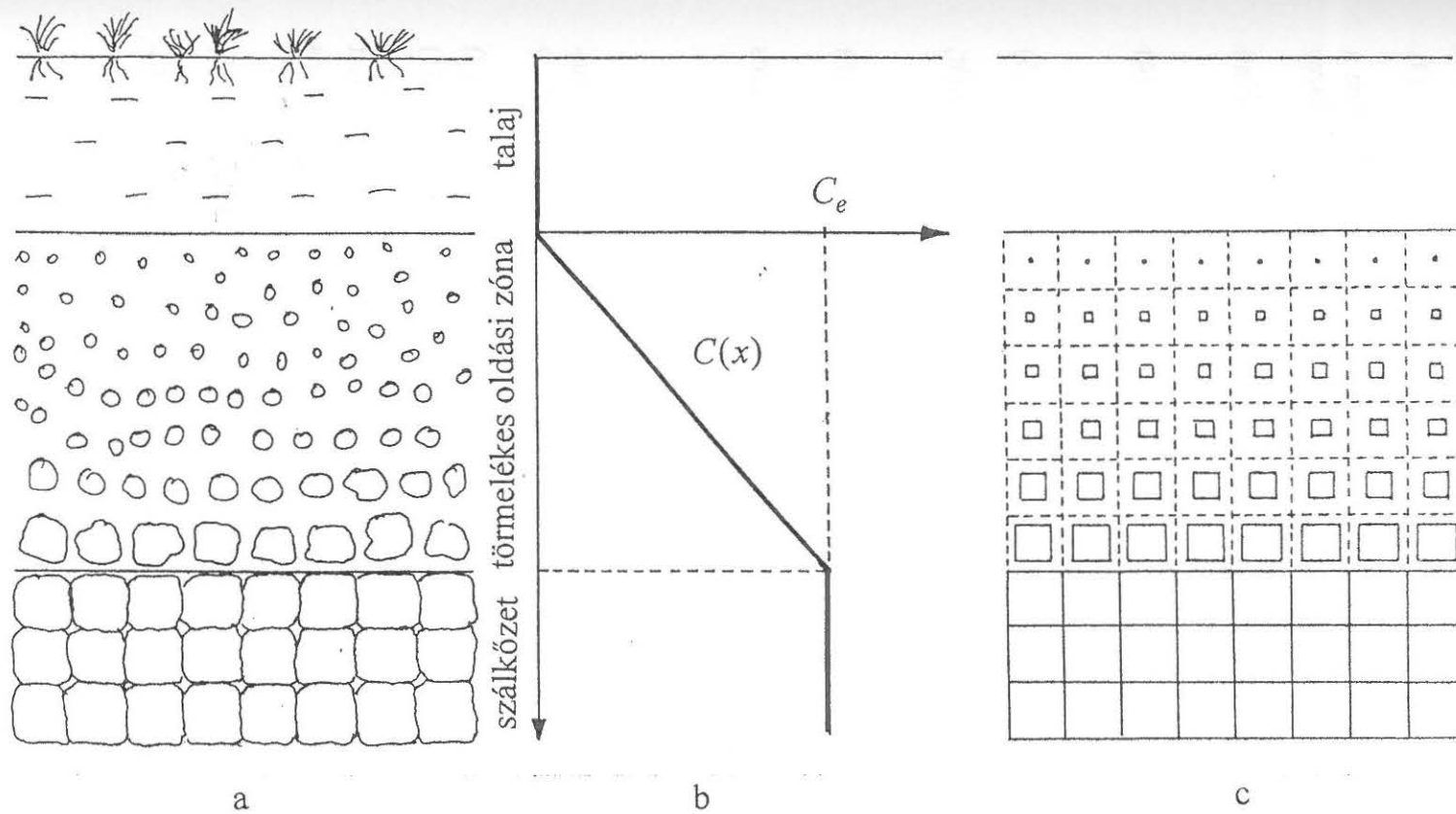
$$C(x) = \frac{C_e}{d} \cdot x \quad (0 \leq x \leq d), \quad (1)$$

itt C_e a feloldott kalciumkarbonát egyensúlyi koncentrációja (1. ábra). Megjegyezzük, hogy az (1) egyenlet SZUNYOGH (1994) által e mennyiségre levezetett általános megoldás Taylor-sorának a lineárisal bezáruló tagja.

A karsztos oldás általános folyamatát a klasszikus NERNST (1904) által felállított differenciálegyenlettel jellemezzük:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot S \cdot (C_e - C) \quad (2).$$

E formulában a szokásos módon a szereplő mennyiségek jelentése a következő: m = a feloldott mészkő tömege, t = az oldási időtartam, k_K = a kémiai oldás sebességi állandója, k_T = a határrétegben végbemenő anyagtranszport sebességi állandója, végül S = a mészkő oldásnak kitett felületének felszíne.



1. ábra: A törmelékzónás karsztos térszín ideális oldódási modellje
 Jelmagyarázat: a. a karsztosodó térszín ideális keresztmetszelve, b. a $C=C(x)$ függvény, c. a geometriai modell
 Fig 1. Ideal dissolution its model of the karst of the zone of debris
 Legend: a. the ideal cross-section of the karstification ground surface, b. the $c=C(x)$ function, c. the geometric model

Az anyagtranszport sebességére *DUBLJANSZKIJ* (1987) vezetett le összefüggést:

$$k_T = \frac{85}{8} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}, \quad (3)$$

itt δ = az áramló rendszerre jellemző karakterisztikus méret, esetünkben a törmelékkockák élhossza, D = a diffúziós állandó és ν = az áramló oldószer kinematikai viszkozitási tényezője.

Jelölje a továbbiakban ρ a mészkő sűrűségét, de pedig az S felszínű törmelékkocka élhosszának dt idő alatti megváltozását. Ekkor

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\rho \cdot S}{2} \cdot \frac{de}{dt}, \quad (4)$$

aminek alkalmazásával a (2) differenciálegyenlet a

$$\frac{de}{dt} = -\frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot \frac{2(C_e - C)}{\rho} \quad (5)$$

formában írható fel. Most az (5) összefüggésbe helyettesítjük a (3) formulát, amely elemi algebrai átalakítások után a

$$\frac{dt}{de} = -\left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}} \right) \cdot \frac{\rho}{2(C_e - C)} \quad (6)$$

formát ölti. Ezen összefüggésre támaszkodva határozhatjuk meg karsztos térszín lokális denudációs sebességét.

3. A karsztos lepusztulás sebességének meghatározása

Ha az ideális törmelékes oldódási zóna egymás alatt n számú rétegben elhelyezkedő kockát tartalmaz, akkor a zóna d vastagsága a kockák a élhosszának segítségével a

$$d = n \cdot a \quad (7)$$

képlettel számítható ki. Korábbi munkánkkal összhangban (*PÉNTEK* 2001) most is az ideális oldódási zóna lefelé történő szakaszos eltolódásával számolunk, amikor Δt ideig tartó változatlan térbeli helyzetű oldási szakaszt követi a zóna a kockaélhosszal történő áthelyeződése lefelé. E szakaszos mozgás átlagos sebességét a

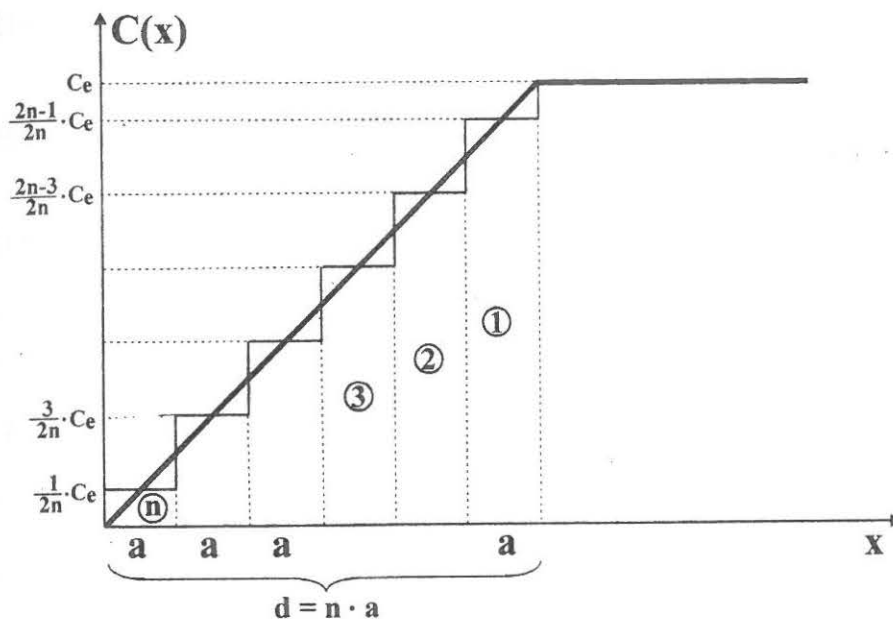
$$c_1 = \frac{a}{\Delta t} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \Delta t} = \frac{d}{n \cdot \Delta t} \quad (8)$$

képlettel határozhatjuk meg, s megjegyezzük, hogy a zóna valóságos, folyamatos süllyedését $a \ll d$ feltevésünk szerint jól közelíthetjük.

Az ideális törmelékes oldódási zóna szakaszos süllyedését korábbi modellünknel alkalmazott módon a $C(x)$ függvényt az alábbi alakú képcsős függvénnyel közelíthetjük meg:

$$C(x) = \frac{2k-1}{2n} \cdot C_e \quad ((k-1) \cdot a \leq x < k \cdot a, \quad 1 \leq k \leq n) \quad (9)$$

(PÉNTEK 2001, 2. ábra).



2. ábra: A $C=C(x)$ függvény megközelítése lépcsős függvénnyel
Fig. 2. Approximation of the $C=C(x)$ by step function

Vizsgáljuk meg ezután egy törmelékkocka teljes feloldódási folyamatát attól a pillanattól kezdve, amikor a kockát felülről süllyedve eléri az ideális törmelékes oldódási zóna alja. Elemzésünk végét az jelenti, amikor a törmelékkocka teljesen feloldódik, s ez akkor következik be, amikor az ideális törmelékes oldódási zóna felső szegélye is elhagyja lefelé haladva az oldódása által éppen eltűnő törmelékkockát.

Legyen tehát az első lépésben a kiszemelt törmelékkocka az ideális törmelékes oldódási zóna legalsó rétegében. Itt az oldószer koncentrációja a (9) összefüggésből a $k = n$ helyettesítéssel nyerhető:

$$C(x) = \frac{2n-1}{2n} \cdot C_e . \quad (10)$$

Ekkor a (6) alatti egyenlet

$$\frac{dt}{de} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho}{2 \left(C_e - \frac{2n-1}{2n} C_e \right)} \quad (11)$$

alakot ölti, amelynek rendezésével a

$$dt = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho}{\frac{1}{n} \cdot C_e} de \quad (12)$$

összefüggést nyerjük. A (12) egyenlet Δt időtartamú első oldási szakaszra történő integrálásával

$$\int_0^{\Delta t} dt = - \frac{\rho}{\frac{1}{n} \cdot C_e} \cdot \int_{e_n}^{e_{n-1}} \left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right) de , \quad (13)$$

azaz

$$[t]_0^{\Delta t} = - \frac{\rho}{\frac{1}{n} \cdot C_e} \cdot \left[\frac{e}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{e^2}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right]_{e_n}^{e_{n-1}} , \quad (14)$$

adódik, amelynek kiszámítása és rendezés után kaphatjuk az

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{e_n - e_{n-1}}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{e_n^2 - e_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \quad (15)$$

formulát.

Az első oldódási szakaszt követően az ideális törmelékes oldódási zóna a értékkel mélyebbre tolódik, így a vizsgált törmelékkočka az aluról számított második rétegbe kerül, ahol azt már agresszívebb oldószer oldja tovább. Itt az oldószer koncentrációja a (9) képletből a $k = n-1$ helyettesítéssel adódik:

$$C(x) = \frac{2n-3}{2n} \cdot C_e . \quad (16)$$

A (6) egyenletbe helyettesítve a (16) értéket a

$$\frac{dt}{de} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho}{2 \left(C_e - \frac{2n-3}{2n} \cdot C_e \right)} \quad (17)$$

összefüggést nyerhetjük, ahonnan az első lépésben részletezett módon származtathatjuk a (15) formulának megfelelő

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{e_{n-1} - e_{n-2}}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{e_{n-1}^2 - e_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \quad (18)$$

egyenletet.

Eljárásunkat tovább folytatva az n -edik lépésben a törmelékkocka az ideális törmelékes oldódási zóna felső rétegébe kerül, ahol az utolsó oldódási szakaszban teljesen feloldódik. Itt az oldószer koncentrációja a (9) összefüggésből a $k = 1$ helyettesítéssel kapható meg:

$$C(x) = \frac{1}{2n} \cdot C_e, \quad (19)$$

A (6) egyenlet formája

$$\frac{dt}{de} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{e}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right) \cdot \frac{\rho}{2 \left(C_e - \frac{1}{2n} \cdot C_e \right)}, \quad (20)$$

amelyből a fentiekben részletezett módon kaphatjuk a (15) összefüggésnek megfelelő

$$\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{e_1 - e_0}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{e_1^2 - e_0^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \quad (21)$$

egyenletet.

Adjuk össze ezután a (15), (18), valamint (21), összesen n számú formuláját, amely rendezés után az

$$\begin{aligned} & \frac{1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1)}{n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \\ & = \frac{(e_n - e_{n-1}) + (e_{n-1} - e_{n-2}) + \dots + (e_1 - e_0)}{k_K} + \\ & + \frac{4}{85} \cdot \frac{(e_n^2 - e_{n-1}^2) + (e_{n-1}^2 - e_{n-2}^2) + \dots + (e_1^2 - e_0^2)}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \end{aligned} \quad (22)$$

alakot ölti. A (22) bal oldalán az első n db páratlan szám összege szerepel, ennek értéke n^2 , a jobb oldalon pedig két teleszkópikus összeg szerepel, s miután $e_n = a$ és $e_0 = 0$, így a vizsgált összefüggésből

$$\frac{n \cdot C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{a}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \quad (23)$$

adódik. Ebből már meghatározhatjuk az ideális törmelékes oldódási zóna Δt oldódási szakaszainak nagyságát:

$$\Delta t = \frac{\rho}{n \cdot C_e} \cdot \left(\frac{a}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right), \quad (24)$$

a zóna lefelé történő eltolódásának (8) szerinti átlagos sebessége pedig:

$$c_1 = \frac{d}{n \cdot \Delta t} = \frac{C_e \cdot d}{\rho} \cdot \left(\frac{a}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot v}} \right)^{-1} \quad (25)$$

értékű.

Ezután már könnyen meghatározhatjuk a karsztos térszín lokális denudációs sebességét. Tekintsük az ideális törmelékes oldódási zóna egy tetszőleges n db, felfelé egyre kisebb méretű oldódó felületű kockákból álló oszlopát. E kockák élhossza lentről felfelé haladva a Δt időtartamú oldási szakasz kezdetén a fentiek szerint $e_n = a, e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_2, e_1$, az oldási szakasz végén pedig rendre $e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_1, e_0 = 0$. E kockák térfogatai az oldási szakasz kezdetén $V_n = a^3, V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_1$, az oldási szakasz végén viszont $V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_1, V_0 = 0$. Ezért a vizsgált oszlopból Δt idő alatt kioldott térfogat nagysága:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (V_n - V_{n-1}) + (V_{n-1} - V_{n-2}) + \dots + (V_2 - V_1) + (V_1 - V_0) = \\ &= V_n + (-V_{n-1} + V_{n-1}) + (-V_{n-2} + V_{n-2}) + \dots + (-V_1 + V_1) + (-V_0) + \quad (26) \\ &= V_n - V_0 = V_n = a^3 \end{aligned}$$

Ha a karsztos térszín ezen eltűnő kioldódott tömeghiányából származó, Δt időtartam alatti Δx süllyedésére nézve

$$\Delta V = a^2 \cdot \Delta x, \quad (27)$$

ahonnan (26) alkalmazásával

$$a^3 = a^2 \cdot \Delta x, \quad (28)$$

azaz

$$\Delta x = a \quad (29)$$

következik. A (24) és (29) felhasználásával a denudációs sebesség értéke:

$$c_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{a}{\frac{\rho}{n \cdot C_e} \cdot \left(\frac{a}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}} \right)} =$$

$$= \frac{C_e \cdot d}{\rho} \left(\frac{a}{k_K} + \frac{4}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}} \right)^{-1} \quad (30)$$

Vegyük észre, hogy a törmelékes zóna lefelé történő eltolódási átlagos c_1 sebessége és a karsztos térszín süllyedésének c_2 sebessége számításaink szerint megegyezik, tehát:

$$c_1 = c_2 \quad (31)$$

Ezen eredményünket érdemes összevetni e dolgozat előzményének tekinthető munka $c_2 < c_1$ egyenlőtlenségével, amelyet ideális gömb alakú törmelékes zóna alkalmazásával nyertünk (PÉNTEK 2001).

Befejezésül bemutatott modellünket egy numerikus példán keresztül illusztráljuk. Legyen az ideális törmelékes zóna vastagsága $d = 1,5$ m, az egyes törmelékkockák élhossza a zóna alján $a = 0,02$ m, legyen a zóna hőmérséklete $T = 283^\circ K \approx 10^\circ C$, az éves átlagos karsztos működési idő $\eta = 1000 \frac{h}{év}$. Ekkor a (25), illetve a vele megegyező eredményű (30) formula alapján

$$c_1 = c_2 = 8,7733 \cdot 10^{-1} \frac{mm}{h} \quad (32)$$

folyamatos denudációs sebesség számítható, az évi 1000 órás működés esetén ez a sebesség jó közelítéssel

$$c_\eta = 0,1 \frac{mm}{év} \quad (33)$$

nagyságúnak adódik. Ez azt jelenti, hogy a karsztos térszín ilyen törmelékes zóna mellett 10 év alatt süllyed 1 mm-rel, vagyis egy évszázad alatt 1 cm nagyságot, ami változatlan feltételek mellett 10.000 év alatt eredményez 1 m-es süllyedést. A számítások további részleteire vonatkozóan információkat találhatunk DUBLJANSZKIJ (1987) és PÉNTEK-VERESS (2002) munkáiban.

A (25), illetve (30) összefüggés elemzésével láthatjuk, hogy a denudáció sebességét a törmelékes zóna geometriai jellemzői (d, a), a karsztos oldás kémiai jellemzői (C_e, k_K), végül áramlástanai mennyiségek (D, ν) határozzák meg a kőzetet jellemző ρ sűrűség ismeretében.

4. Összegzés

Dolgozatunkban egy olyan matematikai modellt ismertettünk, amely lehetővé teszi egy-egy adott karsztos térszín denudációs sebességének meghatározását. A karsztos oldódás horizontális modellje a talaj és a szálkőzet közötti törmelékes zóna képződésén nyugszik. E tartomány létét számos feltárás bizonyítja. A törmelékes zóna az autogén karsztok teljes területén megszakítás nélkül kifejlődhet. Mivel azonban a kőzet minősége, töredezettsége, a kőzetet borító talaj vastagsága és összetétele pontról pontra változhat, így a denudáció üteme is függ az adott helytől. A denudáció ütemét természetesen befolyásolja még a beszivárgástól függő éves működési idő is. E differenciált denudációs sebesség eredményeként alakulnak ki a változatos felszínű, töbröket tartalmazó karsztos térszínek. A korábbi modellektől eltérően a számítások során kocka alakú törmelékdarabkák rendszeréből építjük fel a törmelékes oldódási zónát. Viszonylag kevés paraméter mérésével, illetve számításával meghatározható a karsztos denudáció sebessége, s így lehetőség nyílik a térszín múltbeli és jövőbeni változásának jellemzésére is.

IRODALOM

- DUBLJANSZKIJ, J.V.* (1987): Teoreticeszkoje modelirovanije dinamiki formirovanija gidrotermokarsztovüh polosztyej – Metodi i izucsenyija geologicseszkih javlenij, Novoszibirszk p. 97-111.
- NERNST, W.* (1904): Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen II. – Zeitschrift für Physikalische Chemie. 47. p. 52-55.
- PÉNTEK K.* (1998): Néhány karsztos folyamat matematikai leírása Ph.D. disszertáció. JATE, TTK
- PÉNTEK K.* (2001): Karsztosodó mészkő térszínek lepusztulásának matematikai modellje – Karsztfejlődés VI. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 13-25.
- PÉNTEK K. – VERESS M.* (2002): A karsztos lepusztulás sebességének kiszámítása egy törmelékes oldódási zóna adatainak felhasználásával – Karsztfejlődés VII. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 73-86.
- SZUNYOGH, G.* (1994): A horizontális karsztos lepusztulás folyamatának matematikai modellezése – BDTF Tudományos Közleményei IX. Természettudományok IV. Szombathely, p. 173-201.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1990): Kísérlet a karsztos felszínek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.