

## KARROS FELSZÍNFEJLŐDÉS MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

SZUNYOGH GÁBOR

Berzsenyi Dániel Főiskola 9700 Szombathely Károlyi Gáspár tér 4.  
szgabor@deimos.bdtf.hu

*Abstract: This article demonstrate the general equation system of the karstification of limestone terrain with variable angle of slope. The equations consider the flow rate of the water flowing on the limestone surface as well as the calcium carbonate concentration in the water and the thickness of the liquid film. The solution of equations gives the velocity of denudation as a function of precipitation, dip of slope and direction of rainfall.*

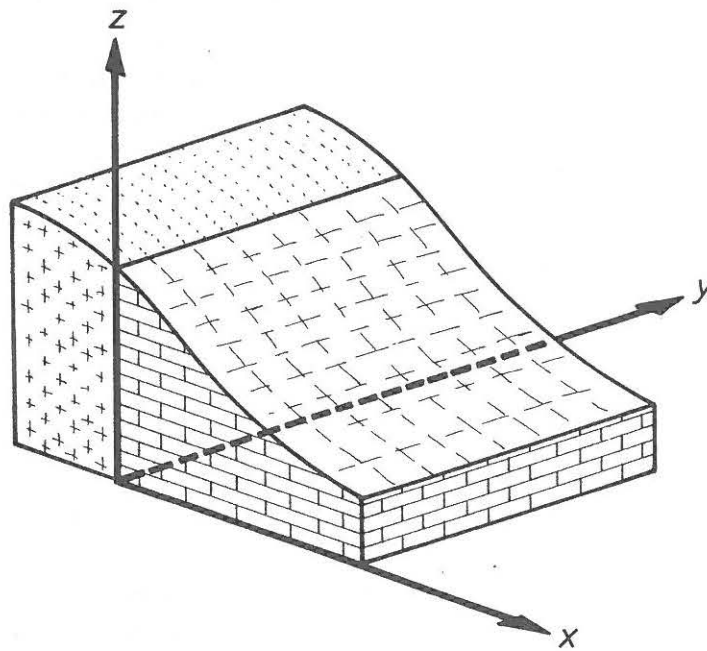
### 1. Bevezetés

A BDF karsztkutató munkacsoportja mintegy tíz éve foglalkozik mészkőfelszínek karrosodásának kutatásával. E program első lépése terepi megfigyeléseket és morfometriai méréseket foglalt magába, melynek eredményei lehetővé tették a karros felszínfejlődés törvényszerűségeinek feltárását, mind a klasszikus karsztmorfológia, mind a matematikai modellezés módszereit felhasználva. A terepi tapasztalatok összegzése lehetővé tette egy-egy, karros formakincsben gazdag terület kialakulásának fejlődéstörténeti értelmezését (VERESS 1993, 2000.a, 2001, 2002), ill. egy olyan elméleti-fizikai alapokon nyugvó matematikai modell felállítását, mellyel számszerűen is jellemezhető a sziklafelszínnek lepusztulásának folyamata. Az elméleti vizsgálatok eleinte egy-egy konkrét formatípus leírására irányultak (VERESS-PÉNTEK 1990, SZUNYOGH 1995, VERESS-PÉNTEK 1998), majd — felismerve közös törvényszerűségeiket — sikerült felállítani egy igen általános érvényű egyenletrendszer, amely számot ad valamennyi, talajelborítás nélküli, szabad mészkőfelszín korróziójáról (SZUNYOGH 1994, 2000.a). Ezen egyenletrendszer általános megoldása azonban nem lehetséges; konkrétan csak az egyes karros jelenséghez tartozó partikuláris megoldásai adhatók meg. Ilyen megoldások az elmúlt években folyamatosan készültek, ill. kidolgoztuk az általános megoldás számítógépi algoritmusát (SZUNYOGH 2000.b). A jelen cikk is ezen egyenletrendszernek egy bizonyos, konkrét feladathoz kapcsolódó megoldását ismerteti. Aktualitását a karsztkutató csoport chilei expedíciója során felmerült kérdések adták, ahol is felismerték, hogy szoros kapcsolat látszik bizonyos karrformák elhelyezkedése és a területen uralkodó szél iránya között. A szél (melynek sebessége 80-120 km/h) befolyásolja a csapadékhullás irányát és intenzitását, tehát

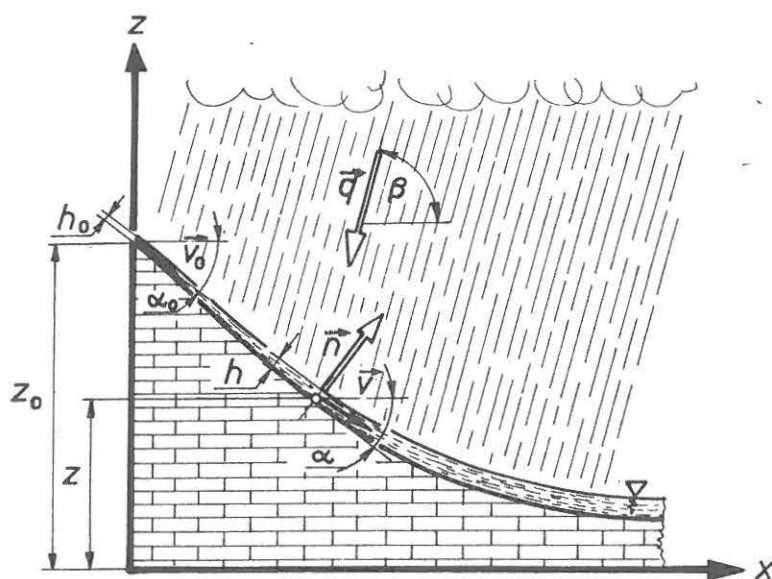
tisztázni kellett a csapadékhullás paramétereinek és a mészkőfelszínek oldódása között fennálló törvényszerűségeket. Az alább bemutatásra kerülő elméleti modell tehát a sziklakarrok lepusztulásának sebessége, a mészkőfelszín kezdeti alakja és a csapadék iránya és nagysága között keres szám-szerű kapcsolatot.

## 2. A denudáció sebessége változó dőlésszögű lejtő esetén

Tekintsünk egy olyan szabad sziklafelszínt, melynek csapásvonalai (szintvonalai) párhuzamos egyenesek (1. ábra). Keressük eme felület leoldódását, feltéve, hogy a szükséges oldószert a vízszintessel  $\beta$  szöget bezáró,  $q$  tömeghozamú csapadék szolgáltatja. Legyen a mészköves összlet véges, azaz balról egy nem karsztosodó sziklafal határolja. Adja meg a mészkő felületét a  $t=0$  időpontra vonatkozóan a  $z_0(x)$  függvény. Meghatározandó e felület alakja valamely tetszőleges ( $t > 0$ ) időpontra, azaz keresett a  $z(x,t)$  függvény (2. ábra).



1. ábra. A vizsgált kőzetkörnyezet tömbszelvénye  
Fig. 1. Sketch of the examined karstmorphological situation



2. ábra. A számítások során alkalmazott jelölések  
Fig. 2. Denotation of quantities in the calculations

A karrosodó felszín leírását alapvetően egy olyan parciális differenciálegyenlet-rendszer szolgálja, mely figyelembe veszi az áramlás hidraulikai sajátosságait, a folyamatban résztvevő (egymással nem vegyülő) anyagok tömegének megmaradási törvényeit és a mészkőalakzatok változásával járó geometriai összefüggéseket (SZUNYOGH 2000.a). Mielőtt azonban felírnánk ezeket az egyenleteket (és megadnánk fizikai tartalmukat), fogalmazzunk meg bizonyos, az általános egyenletrendszert egyszerűsítő lehetőségeket.

A 2. ábra szerint a mészkő felületének magassága  $y$ -irányba nem változik, ezért valamennyi mennyiség  $y$  irányú deriváltja nulla, azaz

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

További egyszerűsítést jelent, hogy a víz áramlási sebességének nem lesz  $y$  irányú komponense, hiszen a víz a felület dőlésvonalai mentén folyik lefelé, azaz

$$v_y = 0. \quad (2)$$

Így az áramlás sebességvektora

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k}. \quad (3)$$

A szabad mészkőfelszínnek leoldódásának korábban levezetett általános egyenletrendszere a fenti egyszerűsítésekkel az alábbi alakot ölti:

$$v_x = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (4)$$

$$\left(h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1} + v_x \cdot h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1}} = -\frac{\mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n}}{\rho_v} \quad (5)$$

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial v_x}{\partial x} = k \frac{c_e - c}{h} + \frac{c}{\rho_v h} \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -k \frac{c_e - c}{\rho_k} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1} \quad (7)$$

ahol

$\eta$ — a víz dinamikai viszkozitási tényezője (kg/m·s),

$\rho_K$ — a mészkő sűrűsége (kg/m<sup>3</sup>),

$\rho_v$ — a víz sűrűsége (kg/m<sup>3</sup>),

$c$ — a folyadékfilm kalciumkarbonát-koncentrációja [ $c = c(x, t)$ ],

$c_e$ — a vízben oldott kalcium-karbonát egyensúlyi koncentrációja,

$g$ — a nehézségi gyorsulás (m/s<sup>2</sup>),

$h$ — folyadékfilm vastagsága [ $h = h(x, t)$ ],

$k$ — az oldódás sebességi tényezője (m/s),

$\mathbf{n}$ — a felület normálisa (azaz a közetfelületre merőleges egységvektor),

$\mathbf{q}_v$ — a csapadék tömegáramsűrűség-vektora (kg/m<sup>2</sup>·s),

$v_x$ — a víz sebességének  $x$ -irányú komponense [ $v_x = v_x(x, t)$ ].

A (4) megadja a lepelvízben áramló folyadék sebességét a Navier-Stokes egyenlet megoldásaként. A képlet kifejezi, hogy a víz sebessége egyenesen arányos a vízréteg vastagságának négyzetével, fordítottan arányos viszkozitási tényezőjével, és függ a vízfilmet hordozó felület meredekségétől.

Az (5) a víz tömegének megmaradását tükröző egyenlet. A jobb oldalon álló mennyiség megadja, hogy időegység alatt mennyi víz érkezett a mészkő felületének egységnyi hosszúságú sávjára. Bal oldala a hozambővüléssel járó sebesség- ill. vízmélység-növekedést írja le.

A (6) a vízben oldott kalcium-karbonátra vonatkoztatva szerepét a tömegmegmaradás tételének. Az egyenlet bal oldala megadja az egységnyi

térfogatú vízben oldott  $\text{CaCO}_3$  tömegáramának növekményét, midőn a víz (áramlása során) egységnyi utat tesz meg. Az egyenlet jobb oldala e növekmény forrásairól ad számot: első tagja a mészkőről leoldott  $\text{CaCO}_3$  mennyiségét fejezi ki (ez növelő tényező), a második tagja a csapadékból származó, oldott  $\text{CaCO}_3$ -ot még nem tartalmazó „hígítószer” hatását számszerűsíti. (Ez viszont a kalcium-karbonát koncentrációját csökkentő tényező, mert mint alább kiderül,  $q_v \cdot n$  negatív.)

A (7) bal oldala a kőzetfelszín süllyedési sebességét adja meg, mely nyilvánvalóan arányos az időegység alatt kémiai úton (oldódással) eltávolított  $\text{CaCO}_3$  mennyiségével. Az egyenletek részletes levezetése megtalálható a szakirodalomban (SZUNYOGH 1994, 1998).

Jelölje a felület normálisának komponenseit  $n_x, n_y, n_z$ , így maga a vektor

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}. \quad (8)$$

Elemi differenciálgeometriai összefüggések szerint  $n_x, n_y, n_z$  összeálítható a felület különböző irányú parciális deriváltjaiból (SZUNYOGH G. 1998). Kihhasználva az (1) adta egyszerűsítési lehetőségeket, adódik, hogy

$$n_x = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \quad (9)$$

$$n_y = 0 \quad (10)$$

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \quad (11)$$

A (9) és (11)-ben szereplő differenciálhányadosok szemléletes geometriai tartalommal rendelkeznek: a felszín  $\alpha$  lejtőszögének iránytangensét szolgáltatják:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{tg } \alpha. \quad (12)$$

ahol  $\alpha$  előjeles mennyiség: értéke pozitív, ha a felület pozitív  $x$ -irányba emelkedik, negatív, ha süllyed. (A továbbiakban célszerű a negatív esetet szem előtt tartani, mert ekkor a víz áramlási sebessége pozitív.) Ennek alapján írható, hogy

$$n_x = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\sin \alpha \quad (13)$$

$$n_y = 0 \quad (14)$$

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \cos \alpha, \quad (15)$$

tehát a felület normálvektora:

$$\mathbf{n} = -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{k}. \quad (16)$$

A csapadék vízhozamát a tömegáramsűrűség-vektorral jellemezhetjük, mely matematikailag

$$\mathbf{q}_v = q_v \mathbf{e}_v \quad (17)$$

formában állítható elő. A (17)-ben

ahol

$q_v$  — a csapadék tömegáramsűrűség-vektorának abszolút értékét ( $\text{kg}^3/\text{m}^2\text{s}$ ),

$\mathbf{e}_v$  — az esőcseppek haladási irányába mutató egységvektor.

A 2. ábra jelölései alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{e}_v = -\cos \beta \mathbf{i} - \sin \beta \mathbf{j}, \quad (18)$$

ahol  $\beta$  — a csapadékhullás irányának a vízszintessel bezárt (dőlés-) szöge, tehát

$$\mathbf{q}_v = -q_v [\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}]. \quad (19)$$

Következésképp

$$\mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n} = -q_v [\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}] \cdot [-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{k}] = -q_v \sin(\beta - \alpha) \quad (20)$$

Használjuk ki továbbá, hogy a (4)-ben szereplő kifejezés is előállítható a felület dőlésszögével:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \quad (21)$$

Az (5) egyenlet bal oldalának harmadik tagja átírható az alábbi módon:

$$v_x \cdot h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} = v_x \cdot h \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}, \quad (22)$$

így a alapegyenletek az alábbi alakot öltik:

$$v_x = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (23)$$

$$\left( h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} + v_x \cdot h \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} \right) = \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) \quad (24)$$

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{k}{h} (c_e - c) - \frac{c}{\rho_v h} q_v \sin(\beta - \alpha) \quad (25)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{k}{\rho_k} \frac{c_e - c}{\cos \alpha} \quad (26)$$

Vegyük észre, hogy a (24) és (25) bal oldalán álló összegek egy-egy deriváltba összefoglalhatók, így az alapegyenletek

$$v_x = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h \cdot v_x}{\cos \alpha} \right) = \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_x \cdot c) = \frac{k}{h} (c_e - c) - \frac{c}{\rho_v h} q_v \sin(\beta - \alpha) \quad (29)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{k}{\rho_k} \frac{c_e - c}{\cos \alpha} \quad (30)$$

formát vesznek fel. A (27) – (30) parciális differenciálegyenlet-rendszer egyértelmű megoldása kiegészítő egyenleteket követel meg, melyek a következők:

Geometriai egyenletek:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}}, \quad (31)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}}. \quad (32)$$

Kezdeti feltételek:  $z(x) = z_0, \quad \text{ha } x=0. \quad (33)$

Peremfeltételek:  $v_x(x) = v_{0x} \text{ és } h(x) = h_0, \quad \text{ha } x=0, \quad (34)$

ahol

$v_0$  — a mészkőfelszín felső éle mentén belépő víz sebessége (m/s),

$h_0$  — a mészkőfelszín felső éle mentén belépő vízréteg vastagsága (m).

A (27) – (30) megoldásának első lépéseként helyettesítsük a (27)-et a (28)-ba:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\rho_v g h^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3\eta} \cdot \frac{h}{\cos \alpha} \right) = \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha), \quad (35)$$

rendezve:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \sin \alpha) = -\frac{3\eta q_v}{\rho_v^2 g} \sin(\beta - \alpha). \quad (36)$$

Integráljuk a (36) mindkét oldalát  $x$ -szerint:

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \sin \alpha) dx = \frac{3\eta q_v}{\rho_v^2 g} \int_0^x \sin(\beta - \alpha) dx. \quad (37)$$

A (37) bal oldala elemi módon integrálható, így kapjuk, hogy

$$h^3 \sin \alpha - h_0^3 \sin \alpha_0 = -\frac{3\eta q_v}{\rho_v^2 g} \int_0^x \sin(\beta - \alpha) dx, \quad (38)$$

ahol  $\alpha_0$  a kőzetfelszín dőlésszöge a mészkőtábla felső pereme mentén. ( $\alpha_0$  nyilvánvalóan negatív, ha rajta a víz balról jobbra, azaz pozitív irányba folyik).

A (38)-ból kifejezve  $h$ -t, a folyadékfilm vastagságára

$$h(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \alpha(x)} \left[ h_0^3 \sin \alpha_0 - \frac{3\eta q_v}{\rho_v^2 g} \int_0^x \sin[\beta - \alpha(x)] dx \right]} \quad (39)$$

összefüggést nyerjük.

Ha a felület  $z(x,t)$  egyenlete ismert, akkor a (31)-ben kijelölt deriváltak elvégzése után  $\sin \alpha(x)$  meghatározható, melynek inverzét képezve maga  $\alpha(x)$  is kifejezhető:

$$\alpha(x) = \arcsin \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}}. \quad (40)$$



$\alpha(x)$  birtokában a (39) közönséges numerikus integrálással meghatározható. Végül a (39)-et a (27)-be írva eljutunk a mészkő felszínén áramló víz sebességét megadó összefüggéshez:

$$v_x(x) = -\frac{\rho_v g h^2(x)}{3\eta} \sin \alpha(x) \cos \alpha(x) \quad (41)$$

amely numerikusan szintén előállítható.

A leoldódás második egyenletének, azaz a (29)-nek integrálása érdekében vezessük be a

$$v_x \cdot c = u \quad (42)$$

jelölést.  $u$  fizikailag megadja a vízzel szállított kalcium-karbonát tömegáram-sűrűségét ( $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$ ). Innen

$$c = \frac{u}{v_x}, \quad (43)$$

melynek figyelembevételével a (29)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{h(x)} \left( c_e - \frac{u}{v_x(x)} \right) - \frac{u q_v}{\rho_v h(x) v_x(x)} \sin[\beta - \alpha(x)] \quad (44)$$

alakba írható. (Az egyenlet felírásánál külön jelöltük, hogy  $h$ ,  $v_x$ , és  $\alpha$   $x$  függvénye, tehát az egyenlet megoldásakor nem tekinthetők állandóknak. E jelölést azonban a továbbiakban elhagyjuk.) A (44) egy változó együtthatójú, közönséges, nemlineáris, elsőfokú differenciálegyenletet szolgáltat  $u(x,t)$ -re nézve:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h v_x} \left( q_v \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\rho_v} + k \right) u = + \frac{k}{h} c_e. \quad (45)$$

Átrendezve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{h \cdot v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] u + \frac{k}{h} c_e. \quad (46)$$

Kezdeti feltétellül szolgál, hogy az oldódásnak kitett mészkőfelszín felső élénél a víz még nem tartalmaz oldott kalcium-karbonátot, azaz

$$c(x) = 0, \quad \text{ha } x=0, \quad (47)$$

következésképp (a 42) értelmében

$$u(x) = 0, \quad \text{ha } x=0, \quad (48)$$

A (46) zárt alakban integrálható. Keressük általános megoldását az „állandók variálásának módszere” szerint, azaz első lépésben határozzuk meg a (46) homogénné tett változatának általános megoldását (melyet  $u_h$ -val jelölünk).

$u_h$  differenciálegyenletéhez úgy jutunk, hogy a (46)-ot „megcsonkítjuk”: elhagyjuk jobb oldalának második (azaz  $u$ -tól független) tagját. Marad tehát

$$\frac{du_h}{dx} = \frac{-1}{h \cdot v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] u_h. \quad (49)$$

Szétválasztva

$$\frac{du_h}{u_h} = \frac{-1}{h \cdot v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] dx. \quad (50)$$

majd mindkét oldalát integrálva

$$\ln\left(\frac{u_h}{U}\right) = \int_0^x \frac{-1}{h v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] dx \quad (51)$$

adódik, ahol  $U$  egy egyelőre ismeretlen integrációs állandó. Az (51) mindkét oldalát  $e$ -alra emelve véve a homogén megoldást végül

$$u_h(x) = U \exp \left\{ \int_0^x \frac{-1}{h v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] dx \right\} \quad (52)$$

alakban nyerjük. Az egyszerűbb írásmód érdekében vezessük be az (52) kitevőjében álló kifejezésre a tömörebb

$$\mathcal{G}(x) = \int_0^x \frac{-1}{h v_x} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha) + k \right] dx \quad (53)$$

jelölést. Így írhatjuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldása

$$u_h(x) = U e^{\mathcal{G}(x)}. \quad (54)$$

A (46) megoldásának második lépéseként tételezzük fel, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása az (54)-hez hasonló formában előállítható, azzal a különbséggel, hogy az  $U$  együtthatót nem tekintjük állandónak, hanem feltételezzük, hogy  $x$  függvénye. Azaz

$$u(x) = U(x) e^{\mathcal{G}(x)}. \quad (55)$$

Mármost  $U(x)$  oly módon határozandó meg, hogy az (55) eleget tegyen az eredeti (nem csonkított) differenciálegyenletnek. Az (55)-öt a (46)-ba helyettesítve, elvégezve a kijelölt deriválásokat rendezés után  $U(x)$ -re nézve a

$$\frac{dU}{dx} = \frac{k}{h} c_e e^{-\mathcal{G}(x)} \quad (56)$$

differenciálegyenletet nyerjük. Az (56) mindkét oldalát  $x$ -szerint integrálva

$$U = \int \frac{k}{h} c_e e^{-g(x)} dx + V \quad (57)$$

kifejezést kapjuk, melyben már csak  $V$  integrációs állandó szerepel ismeretlenként. Ennek megfelelően a (46) általános megoldása

$$u(x) = \left[ V + \int_0^x \frac{k c_e}{h} e^{-g(x)} dx \right] e^{g(x)}. \quad (58)$$

$V$  meghatározásához vegyük figyelembe a (47) kezdeti feltételt:

$$\text{ha } x=0, \quad \text{akkor } u(x) = 0 \quad (59)$$

Alkalmazva az (58)-at  $x=0$  esetére

$$V = 0 \quad (60)$$

adódik. Ennek alapján a (46) teljes megoldása:

$$u(x) = e^{g(x)} \int_0^x \frac{k \cdot c_e}{h} e^{-g(x)} dx \quad (61)$$

Mivel a (43) szerint

$$c = \frac{u}{v_x}, \quad (62)$$

azért

$$c(x) = \frac{e^{g(x)}}{v_x} \int_0^x \frac{k \cdot c_e}{h} e^{-g(x)} dx. \quad (64)$$

A (64) kizárólag ismert függvényeket ill. mennyiségeket tartalmaz, így segítségével kiszámítható a mészkő felszínén folyó víz kalcium-karbonáttartalmának értéke tetszőleges  $x$  koordinátájú pontra vonatkozólag.

A felszín süllyedésének  $w$  sebessége a  $z = z(x, t)$  függvény  $t$ -szerinti deriváltjából adódik:

$$w = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (65)$$

mely a (30) alapján

$$w = -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{k}{\rho_k} (c_e - c). \quad (66)$$

$c$ -t a (64)-ből véve, végül a karros mészkőfelszín süllyedési sebességére a

$$w(x) = \frac{-1}{\cos \alpha} \frac{k}{\rho_k} \left\{ c_e - \frac{e^{\vartheta(x)}}{v_x} \int_0^x \frac{k \cdot c_e}{h} e^{-\vartheta(x)} dx \right\} \quad (67)$$

képletet kapjuk.

A (67)-ben csupa ismert függvény szerepel, ezért kiszámítása (számítógéppel) nem okoz gondot.

### 3. A denudáció sebessége állandó dőlésszögű lejtő oldódása esetén

A (64) és (67) segítségével analitikusan meghatározhatjuk az oldódás kezdeti sebességét, ha a kiindulási mészkőfelszín egy lejtős síkfelület, azaz ha dőlésszöge állandó:

$$\alpha(x) = \alpha_0, \quad (68)$$

ill.  $\sin \alpha(x) = \sin \alpha_0. \quad (69)$

Ennek alapján a vízfilm vastagsága a (39) szerint

$$h(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \alpha_0} \left[ h_0^3 \sin \alpha_0 - \frac{3 \eta q_v}{\rho_v^2 g} \int_0^x \sin(\beta - \alpha_0) dx \right]} \quad (70)$$

mely kifejezés zárt alakban integrálható, hiszen integrandusza  $x$ -től független, állandó. Rendezés után

$$h(x) = h_0 \sqrt[3]{1 - \frac{3 \eta q_v \sin(\beta - \alpha_0)}{\rho_v^2 g h_0^3 \sin \alpha_0} x} \quad (71)$$

kifejezést nyerjük a lepelvíz vastagságára. Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a

$$\kappa = - \frac{3 \eta q_v \sin(\beta - \alpha_0)}{\rho_v^2 g h_0^3 \sin \alpha_0} \quad (72)$$

jelölést, ahol  $\kappa$  ismert állandókat tartalmaz csupán. Így

$$h(x) = h_0 \sqrt[3]{1 + \kappa \cdot x}. \quad (73)$$

Szükségünk van továbbá  $\vartheta(x)$  függvényre is, mely (ugyanezen közelítések figyelembevételével)

$$\vartheta(x) = \int_0^x \frac{-1}{h(x) v_x(x)} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha_0) + k \right] dx. \quad (74)$$

$h$ -t ill.  $v_x$ -et a (41) és (73)-ból véve, némi átalakításokat követően

$$\vartheta(x) = \int_0^x \frac{-1}{-\frac{\rho_v g}{3\eta} h_0^3 (1 + \kappa \cdot x) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha_0) + k \right] dx \quad (75)$$

Elvégezve a lehetséges átalakításokat

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \frac{3\eta}{\rho_v g h_0^3} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha_0) + k \right] \cdot \int_0^x \frac{1}{1 + \kappa \cdot x} dx, \quad (76)$$

mely zárt alakban integrálgató:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \frac{3\eta}{\rho_v g h_0^3} \left[ \frac{q_v}{\rho_v} \sin(\beta - \alpha_0) + k \right] \frac{1}{\kappa} [\ln|1 + \kappa \cdot x|]_0^x. \quad (77)$$

(A jobb oldal logaritmusos tényezőjének argumentumából az abszolút értékjel elhagyható, mert mind  $\kappa$  mind  $x$  pozitív.) Figyelembe véve  $\kappa$  (72)-ben megadott kifejezését a (77) egyszerűsíthető:

$$\vartheta(x) = \frac{-1}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \left[ k \frac{\rho_v}{q_v} + \sin(\beta - \alpha_0) \right] \frac{\sin \alpha_0}{\sin(\beta - \alpha_0)} \ln[1 + \kappa \cdot x]. \quad (78)$$

A logaritmusos tényező előtt álló kifejezést foglaljuk össze egyetlen  $\lambda$  tényezőbe:

$$\lambda = \frac{-1}{\cos \alpha_0 \sin(\beta - \alpha_0)} \left[ k \frac{\rho_v}{q_v} + \sin(\beta - \alpha_0) \right], \quad (79)$$

így  $\vartheta(x) = \lambda \cdot \ln[1 + \kappa \cdot x]$ , (80)

mely zárt alakban megadja a (64) ill. (67) egyenletekben szereplő segédfüggvény konkrét alakját.

Végezzük el  $\vartheta(x)$  (64)-ben kijelölt integrálást, felhasználva a (73) és (80)-at!

$$\int_0^x \frac{e^{-\vartheta(x)}}{h(x)} dx = \int_0^x \frac{e^{-\lambda \ln[1 + \kappa \cdot x]}}{h_0 \sqrt[3]{1 + \kappa \cdot x}} dx. \quad (81)$$

Az integrandusz számlálója a logaritmus- és az exponenciális függvények szabályait felhasználva átírható, ezért (rendezés után) az alábbi kifejezés adódik:

$$\int_0^x \frac{e^{-\vartheta(x)}}{h(x)} dx = \frac{1}{h_0} \int_0^x (1 + \kappa \cdot x)^{-\lambda - \frac{1}{3}} dx \quad (82)$$

Az integrálás zárt alakban elvégezhető:

$$\frac{1}{h_0} \int_0^x [1 + \kappa \cdot x]^{\lambda - \frac{1}{3}} dx = \frac{1}{h_0} \frac{(1 + \kappa x)^{-\lambda - \frac{1}{3} + 1} - 1}{\left(-\lambda - \frac{1}{3} + 1\right) \cdot \kappa}. \quad (83)$$

A (83)-at a (64)-be helyettesítve eljutunk a vízben oldott koncentráció alakulásához:

$$c(x) = k \cdot c_e \frac{1}{h_0 \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)} \frac{[1 + \kappa x]^{\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)} - 1}{\kappa} \frac{e^{\lambda \ln(1 + \kappa x)}}{-\frac{\rho_v g}{3\eta} h_0^2 \sqrt[3]{1 + \kappa x}^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}. \quad (84)$$

Ismét szem előtt tartva az exponenciális kifejezés átalakítási lehetőségeit

$$e^{\lambda \ln(1 + \kappa x)} = (1 + \kappa \cdot x)^\lambda, \quad (85)$$

vége hajtva egyéb elemi átrendezéseket, végül a vízben oldott kalcium-karbonát koncentrációjára a

$$c(x) = \frac{3\eta k \cdot c_e}{\kappa \rho_v g h_0^3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \frac{3}{2 - 3\lambda} \left\{ 1 - (1 + \kappa x)^{\lambda - \frac{2}{3}} \right\} \quad (86)$$

kifejezést vezethetjük le.

A (84)-et a (67)-be helyettesítve és  $h$ -t a (73)-ból véve a felszín lepusztulásának sebességére kapjuk, hogy

$$w(x) = \frac{-1}{\cos \alpha_0} \frac{k}{\rho_k} \left\{ c_e + \frac{3kc_e}{h_0} \frac{(1 + \kappa x)^{\frac{2}{3} - \lambda} - 1}{(2 - 3\lambda)\kappa} \frac{\exp[\lambda \cdot \ln(1 + \kappa \cdot x)]}{\frac{\rho_v g}{3\eta} h_0^2 \sqrt[3]{1 + \kappa x}^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \right\} \quad (87)$$

amely rendezés után

$$w(x) = \frac{-1}{\cos \alpha_0} \frac{kc_e}{\rho_k} \left\{ 1 - \frac{3\eta k}{\rho_v g h_0^3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \left( \frac{3}{2 - 3\lambda} \right) \frac{1 - (1 + \kappa \cdot x)^{\lambda - \frac{2}{3}}}{\kappa} \right\} \quad (88)$$

alakot ölti. A (88) nevezője egyszerűsíthető, ha beírjuk  $\kappa$  (72)-ban megadott alakját:

$$w(x) = \frac{-1}{\cos \alpha_0} \frac{kc_e}{\rho_k} \left\{ 1 + \frac{1}{\sin(\beta - \alpha_0) \cos \alpha_0} \frac{k\rho_v}{q_v} \frac{3}{2 - 3\lambda} \left[ 1 - (1 + \kappa \cdot x)^{\lambda - \frac{2}{3}} \right] \right\} \quad (89)$$

Számszerű kiértékelés szerint (lásd alább) a (89) jobb oldalának utolsó tényezőjében szereplő  $\kappa x$  tag sokkal kisebb mint egy, ami további egyszerűsítésre ad lehetőséget. Alakítsuk át a (89)-et a következőképpen

$$(1 + \kappa \cdot x)^{\lambda - \frac{2}{3}} = \exp \left\{ \ln \left[ (1 + \kappa \cdot x)^{\lambda - \frac{2}{3}} \right] \right\} = \exp \left\{ \left( \lambda - \frac{2}{3} \right) \ln [ (1 + \kappa \cdot x) ] \right\}. \quad (90)$$

Fejtsük Taylor-sorba a logaritmusos kifejezést, és — kihasználva, hogy a fent említettek szerint  $\kappa x \ll 1$  — hagyjuk el a lineárisnál magasabb hatványú tagokat:

$$\ln(1 + \kappa \cdot x) \cong \kappa \cdot x. \quad (91)$$

Így

$$(1 + \kappa \cdot x)^{\lambda - \frac{2}{3}} \cong \exp \left\{ \left( \lambda - \frac{2}{3} \right) \kappa \cdot x \right\}. \quad (92)$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a

$$\mu = - \left( \lambda - \frac{2}{3} \right) \kappa \quad (93)$$

jelölést.  $\kappa$  és  $\lambda$  (72) és (79) szerint képlete nyomán

$$\mu = \frac{-1}{\sin \alpha_0} \frac{3 \eta}{\rho_v g h_0^3} \left[ \frac{1}{\cos \alpha_0} k + \frac{q_v}{\rho_v} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{\cos \alpha_0} \right) \sin(\beta - \alpha_0) \right]. \quad (95)$$

Ezzel végül a mészkőfelszín süllyedési sebességére

$$w(x) = \frac{-1}{\cos \alpha_0} \frac{k c_e}{\rho_k} \left[ 1 + \frac{1}{\sin(\beta - \alpha_0) \cos \alpha_0} \frac{k \rho_v}{q_v} \frac{3}{2 - 3\lambda} (1 - e^{-\mu x}) \right] \quad (96)$$

összefüggést nyerjük. Hangsúlyozzuk, hogy a (96)-ban szereplő paraméterek már „valóban” állandók, azaz  $x$  (független változóként) csak az exponenciális kifejezésben szerepel.

A karsztos denudáció megítélése szempontjából a felszín függőleges irányú süllyedési sebességénél sok esetben többlet információt ad annak ismerete, hogy milyen vastag közetréteg pusztul le időegység alatt. Meghatározandó ezért a lepusztulás sebességének a mészkőfelszínre merőleges komponense. Elemi differenciálgeometriai megfontolások alapján nyilvánvaló, hogy

$$\dot{b} = |w \cdot \cos \alpha_0|, \quad (97)$$

ahol  $\dot{b}$  az időegység alatt „lehántolódó” réteg vastagságát jelöli. A (96) figyelembevételével

$$\dot{b} = \frac{k c_e}{\rho_k} \left[ 1 + \frac{1}{\sin(\beta - \alpha_0) \cos \alpha_0} \frac{k \rho_v}{q_v} \frac{3}{2 - 3\lambda} (1 - e^{-\mu x}) \right]. \quad (98)$$

A (92)-ben alkalmazott matematikai átalakítást a vízfilmben oldott kalcium-karbonát koncentrációját megadó (86)-összefüggésbe is átvezetve

$$c(x) = \frac{k \cdot c_e}{\sin(\beta - \alpha_0) \cos \alpha_0} \frac{\rho_v}{q_v} \frac{3}{2 - 3\lambda} \{1 - e^{-\mu x}\} \quad (99)$$

#### 4. A levezetett összefüggések karsztmorfológiai értelmezése

##### *Kvalitatív elemzés*

1. A (98)-ból kiolvasható, hogy a karros leoldódás sebessége meglehetősen bonyolult függvénykapcsolatban áll a lejtő  $\alpha_0$  dőlésszögével. A (98)-ban  $\alpha_0$  mind explicite, mind pedig (a  $\lambda$  és  $\mu$  tényezőkön keresztül) impliciten előfordul. Szerepe közvetlenül egyrészt a lepelvíz sebességének meghatározásában, másrészt a mészkőfelszín egységnyi területére hulló csapadék vízhozamának megszabásában van. (Annál kevesebb víz jut a mészkőre, minél kisebb szöget zár be a felszín az esőcseppek tényleges irányával.) Közvetetten tehát  $\alpha_0$  kifejezi a kapcsolatot a karsztos lepusztulás és az esőcseppek mozgásirányát meghatározó uralkodó szélesebesség- és szélirány között. Ez utóbbi hatás kialakításában nyilvánvalóan a  $\beta$  szögnek is meghatározó szerepe van, mely a (98)-ban szintén bonyolult függvényként mutatkozik.

2. A lepusztulás sebességére alapvető hatást gyakorol a  $q_v$  csapadékhozam. A (98)-ban  $q_v$  nemlineáris formában fordul elő, hanem a  $\lambda$  és  $\mu$  tényezőkön keresztül bonyolult módon. Ennek viszonylag nagy földrajzi jelentősége van: kifejezi, hogy a lepusztulás sebessége nem pusztán a mészkőre hullott víz tömegével arányos, hanem az időegység alatt lehullott csapadékkal. Más szavakkal: ha ugyanaz a vízmennyiség hosszantartó, csendes esőként kerül a mészkőre, akkor egy meghatározott, hosszú időszak (pl. ezer év) alatt más lesz a denudáció mértéke, mintha rövidebb ideig tartó, de heves záporok formájában kerülne az oldószer a mészkőre. E lineáris kapcsolat azzal magyarázható, hogy a felszínen áramló (csapadékból tápálkozó) víz hozama nem áll egyenes arányban a víz sebességével és vastagságával, amely tényezők pedig közvetlen (és pedig szintén nem lineáris) viszonylatban vannak az oldódás sebességével. Ha túl nagy a víz sebessége, akkor nincs elegendő idő a kémiai folyamatokhoz, ha pedig a víz túl lassan áramlik, akkor rövid szakaszon belül telítődik, és oldásképtelenné válik.

3. A (96)-ból kiolvasható, hogy ha a kezdetben a lejtő síkfelületű volt is, hamarosan görbültté válik, mert a süllyedés sebessége függ a lejtő tete-



jétől mért  $x$  távolságtól. Ez az összefüggés pedig exponenciális jellegű, ami kifejezi, hogy a lepusztulás sebességében mértékadó különbségek csak egy meghatározott zónán belül mutatkoznak, azon kívül viszont a süllyedés sebessége állandósul. E zóna szélessége a (96) exponenciális kitevőjében álló  $\mu$  tényező reciprokával jellemezhető. Mivel azonban  $\mu$  a (95) szerint függ a lejtő dőlésszögétől, az esőcseppek irányától és a csapadékhozamtól, ezért érthető, miért rendelkezik olyan változatos formakincessel a karros mészkőfelszín.

4. A leoldódás sebessége egyenesen arányos a víz telítési kalcium-karbonát koncentrációjával, mely — mint ismeretes — a levegő széndioxid-tartalmával arányos. Ebből az következik, hogy különböző atmoszférikus viszonyok között lezajló karrosodás jellegében azonos formákat hoz létre, csupán kialakulásuk sebességében van differencia.

5. Az oldódás kémiai folyamatait tükröző  $k$  tényező szintén igen bonyolult függvényként mutatkozik meg, hiszen előfordul mind a  $\lambda$  mind a  $\mu$  tényezőkben. Ez kihangsúlyozza az igényt a lepelvíz alatt zajló oldódás menetének minél alaposabb megismerésére.

6. A (99) kifejezi, hogy a kőzet felszínén szivárgó víz oldott kalcium-karbonát koncentrációja ( $c$ ) a süllyedési sebességhez hasonlóan exponenciálisan változik, és pedig aszimptotikusan tart egy határértékhez. Ez a határérték fordítottan arányos a csapadékhozammal, azaz mennél több víz hullik időegység alatt a területre, (azaz mennél jobban hígul a lepelvíz), annál kisebb lesz  $c$ . Természetesen ez nem azt jelenti, hogy nagyobb csapadéknál lassúbb lenne az oldódás, sőt, épp ellenkezőleg: a kisebb kalcium-karbonát tartalmú víz agresszívabb, így  $c$  csökkenése a maximálisan feloldható mészkő tömegét növeli.

7. A (99) arról is számot ad, hogy a lejtő tetejénél a legkisebb az oldott  $\text{CaCO}_3$  azaz ott a legagresszívabb a víz. Ez abból adódik, hogy ott a csapadékon kívül még a nemkarsztos térszínről érkező agresszív víz is szerepet játszik a korrózióban. Lejjebb ez utóbbi eredetű oldószer telítődik, és csak a csapadékvíz gazdagítja az agresszív összetevőt.

8. A (96)-ból egy további, meglepő tény is kiviláglik. Ha a mészkő felületére csak a csapadék szállít vizet, azaz a nemkarsztos területről nem érkezik oldószer (ami matematikailag  $h_0 \rightarrow 0$  esetnek felel meg), akkor  $\mu \rightarrow \infty$ , következésképp az  $\exp(-\mu x)$  tag nullához tart, bármekkora legyen is  $x$ . Ez azt jelenti, hogy ilyen esetben a mészkőfelszín süllyedése  $x$ -től független, azaz állandó. Más szavakkal: egy tökéletesen sík, lejtős mészkőfelszín nem változtatja az alakját karrosodása során, hanem egyenletesen pusztul. E megállapítás látszólag ellentétben van a terepi tapasztalatokkal: a szabad kőzetfelszín általában hepehupás, barázdákkal, csatornákkal, esetleg

lefolyástalan medencékkel van megtörve. Mindez ráirányítja a figyelmet a fenti megoldás stabilitására: valószínűleg egy kis eltérés a sík felülettől megbontja az egyenletes denudáció dinamikus egyensúlyát, és e kis zavar mérete egyre nagyobbá válik.

#### Kvantitatív elemzés

Végezzünk számszerű becslést a denudáció sebességére nézve! A víz dinamikai viszkozitási tényezője  $\eta=1,9 \cdot 10^{-3}$  kg/m·s; a mészkő sűrűsége  $\rho_K=2300$  kg/m<sup>3</sup>; a víz sűrűsége  $\rho_v=1000$  kg/m<sup>3</sup>; a nehézségi gyorsulás  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup>. az oldódás sebességi tényezője  $k$  a kémiai oldódás sebességének és a diffúziós anyagtranszport sebességének reciprok összegéből adódik:

$$k = \frac{k_K k_D}{k_K + k_D}, \quad (100)$$

ahol  $k_K$  a kémiai oldódás sebessége,  $k_D$  a diffúziós anyagtranszport sebessége.  $k_K$  meghatározása a

$$k_K = A_K e^{-\frac{E_K}{RT}}, \quad (101)$$

képlettel lehetséges, ahol  $A_K = 5,36 \cdot 10^5$  m/s,  $E_K = 5,41 \cdot 10^4$  J/mol,  $R = 8,31$  J/mol·K.  $T$  pedig a víz abszolút hőmérsékletét jelöli.  $T = 283$  K-nel számolva  $k_K = 5,47 \cdot 10^{-5}$  m/s. (DUBLJANSZKIJ 1986).  $k_D$  közelítőleg a

$$k_D = \frac{D}{\delta} \quad (102)$$

összefüggés alapján számítható, ahol  $D$  a diffúziós állandó,  $\delta$  pedig a mészkő felszíne mentén kialakuló határreteg vastagsága. Meghatározására az alábbi összefüggés szolgál:

$$D = A_D e^{-\frac{E_D}{RT}}. \quad (103)$$

A (103)-ban  $A_D = 2,37 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s,  $E_D = 3,72 \cdot 10^4$  J/mol.  $T = 283$  K esetén  $D = 3,19 \cdot 10^{-10}$  m<sup>2</sup>/s. A határreteg vastagsága (itt nem részletezett számítások szerint) jó közelítéssel megegyezik a vízfilm  $h$  vastagságával.  $h$ -nak 0,001 métert véve (lásd. alább) a (102)  $k_D = 3,2 \cdot 10^{-7}$  m/s eredményt ad. Mindezek birtokában, a (100) szerint  $k = 3,2 \cdot 10^{-7}$  m/s.

A vízben maximálisan feloldható kalcium-karbonát koncentrációja

$$c_e = M_{CaCO_3} \sqrt[3]{\frac{K_1 \cdot K_C \cdot K_H}{4 \cdot K_2 \cdot \gamma_{Ca} \cdot \gamma_{HCO_3}^2} P_{CO_2}}, \quad (104)$$

ahol a  $M_{CaCO_3}$  a kalcium-karbonát moláris tömege ( $M_{CaCO_3} = 96 \text{ kg/kmol}$ );  $K_1$  és  $K_2$  a szénsav hidrokarbonátos, ill. karbonátos disszociációs állandója,  $K_H$  a víz hidroxilos disszociációs állandója,  $K_C$  a kalcium-karbonát disszociációs állandója (DREYBROT 1988).  $\gamma_{Ca}$  és  $\gamma_{HCO_3}$  az oldatban lévő kalcium- és hidrokarbonát ionok aktivitási együtthatói, melyek értéke híg oldatok esetén (mint a karrosodás esetében is) 1-gyel egyenlők.  $p_{CO_2}$  a normál levegő széndioxid-tartalmának parciális nyomása ( $p_{CO_2} = 0,0003 \text{ atm}$ ).  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_C$ ,  $K_H$  értékei alapvetően a hőmérséklettől függenek, melyek  $T=5^\circ \text{ C}$  esetén:  $K_1=3,1622 \cdot 10^{-7}$ ,  $K_2=3,1622 \cdot 10^{-11}$ ,  $K_H=6,30057 \cdot 10^{-2}$ ,  $K_C=3,89 \cdot 10^{-9}$ . Mindezeket figyelembe véve  $c_e=0,0546 \text{ kg/m}^3$ .

A csapadékhozam reális értéke 1000-4000 mm/év, melyet másodpercekre átszámítva  $3,17 \cdot 10^{-5}$ - $12,68 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s}$ . A mészkőfelszín felső elemén belépő vízréteg vastagsága reálisan  $h_0=0,1$ - $1 \text{ mm}$  ( $10^{-4}$ - $10^{-3} \text{ m}$ ). A képletekben szereplő többi paraméter értelemszerűen tetszőleges értéket felvehet.

Legyen a mészkő dőlésszöge  $\alpha_0=-10^\circ$ , az esőcseppek hulljanak függőlegesen, azaz legyen  $\beta=90^\circ$ . Az átlagos csapadékhozamnak vegyünk 2000 mm/évet, így  $q_v=6,34 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$ . Ezen adatokkal  $\kappa=0,204 \text{ l/m}$ ,  $\lambda=-4,43$ ,  $\mu=0,968 \text{ l/m}$ , tehát

$$c(x) = 0,041 \cdot [1 - e^{-1,43x}] \text{ kg/m}^3,$$

$$w(x) = 0,0596 - 0,17 \cdot e^{-1,43x} \text{ mm/év.}$$

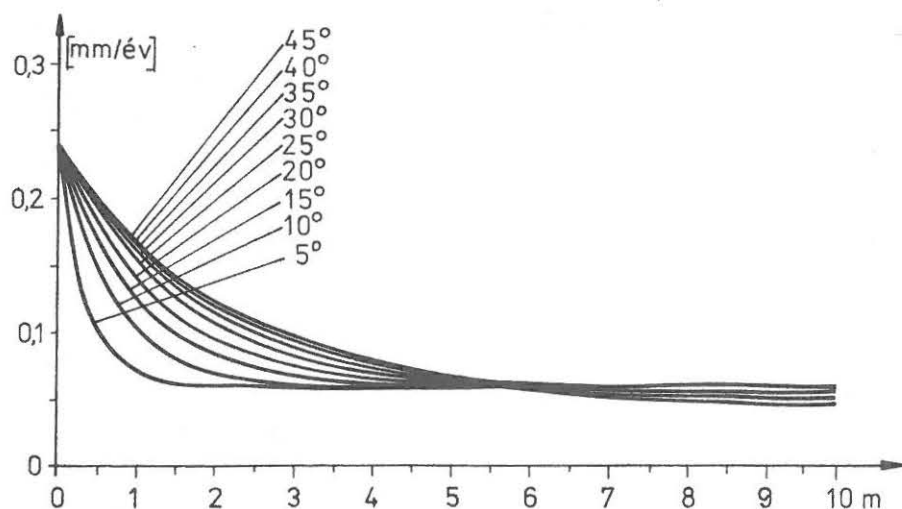
Ha  $x=0$ , akkor  $w=0,23 \text{ mm/év}$ . Ha  $x=1 \text{ m}$ , akkor  $w=0,06 \text{ mm/év}$ .

### Grafikus vizsgálat

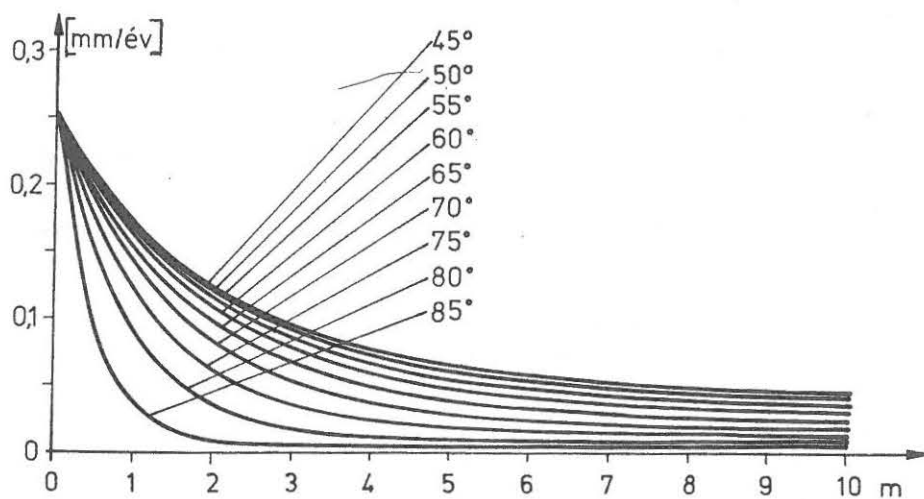
A fent levezetett összefüggések tartalmának szemléltetésére vizsgáljuk meg a leoldódás sebességének alakulását különböző paraméterek függvényében. (A diagrammokon fel nem tüntetett paraméterek értékei megegyeznek a fenti számpéldában szereplőkkel.)

A 3. és 4. ábra mutatja a leoldódás sebességét ( $\dot{b}$ -ot) a lejtő felső élétől mért távolság függvényében. Látható, hogy a sebesség exponenciálisan csökken a távolsággal, de nullától különböző szinten állandósul. Ez azzal magyarázható, hogy az agresszív csapadékvíz a lejtő felső élétől távol is öntözi a mészkövet, így oldó hatását mindenütt kifejtheti. A görbék kezdeti exponenciális jellege a nemkarsztos területről érkező agresszív vizek hatását tükrözi: amint azok fokozatosan telítődnek, úgy egyre csökken oldóképességük. A diagramból az is kiolvasható, hogy a terület dőlésszögének függvényében a telítődés különböző hosszúságú szakaszokon következik be (ill.

különböző hosszúságú szakaszok megtétele után állandósul az oldási sebesség).

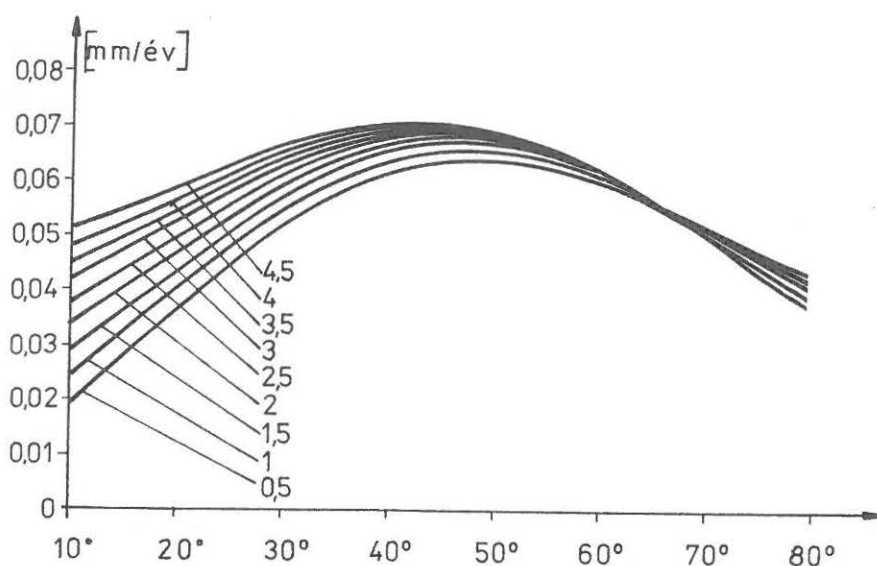


3. ábra. A leoldódás sebessége a lejtő szélétől mért távolság függvényében, különböző dőlésszögek esetén ( $\alpha < 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s, [azaz  $Q = 2000$  mm/év])  
 Fig. 3. Velocity of denudation as a function of distance from brink of slope by different angle of slope ( $\alpha < 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [i.e.  $Q = 2000$  mm/year])



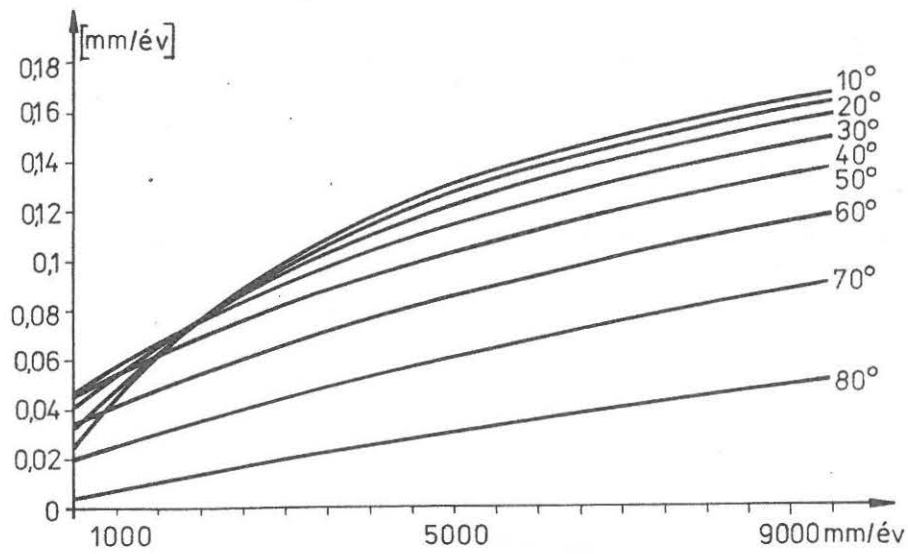
4. ábra. A leoldódás sebessége a lejtő szélétől mért távolság függvényében, különböző dőlésszögek esetén ( $\alpha > 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [azaz  $Q = 2000$  mm/év])  
 Fig. 4. Velocity of denudation as a function of distance from brink of slope by different angle of slope ( $\alpha > 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [i.e.  $Q = 2000$  mm/year])

Az 5. ábra a leoldódás sebességét a mészkőfelszín lejtőszögének függvényében ábrázolja, a lejtő tetejétől mért távolság különböző értékei mellett. Meglepő és karsztmorfológiai szempontból igen figyelemreméltó, hogy valamennyi görbe egy bizonyos dőlésszög mellett maximummal rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy a 35-45° lejtésű sziklafelszínek denudálódnak leggyorsabban. Más szavakkal: az igen kis lejtésű ill. az igen meredek térszínekről időegység alatt kevesebb  $\text{CaCO}_3$  távozik, mint a közepes lejtésűekről. E tény morfológiai következményeinek vizsgálata még hátra van.

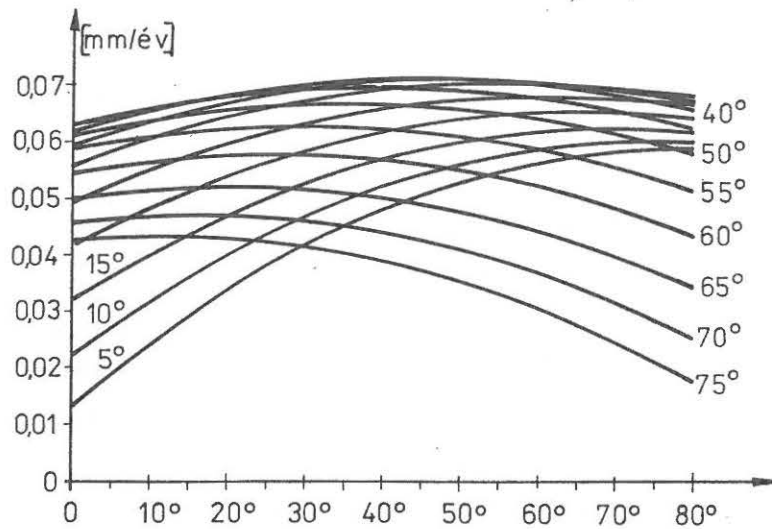


5. ábra. A leoldódás sebessége a mészkőfelszín lejtőszögének függvényében, a lejtő tetejétől mért távolság különböző értékei mellett ( $\beta=90^\circ$ ,  $q_v=6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [azaz  $Q=2000$  mm/év])  
 Fig. 5. Velocity of denudation as a function of angle of slope by different distance from brink of slope ( $\beta=90^\circ$ ,  $q_v=6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [i.e.  $Q=2000$  mm/year])

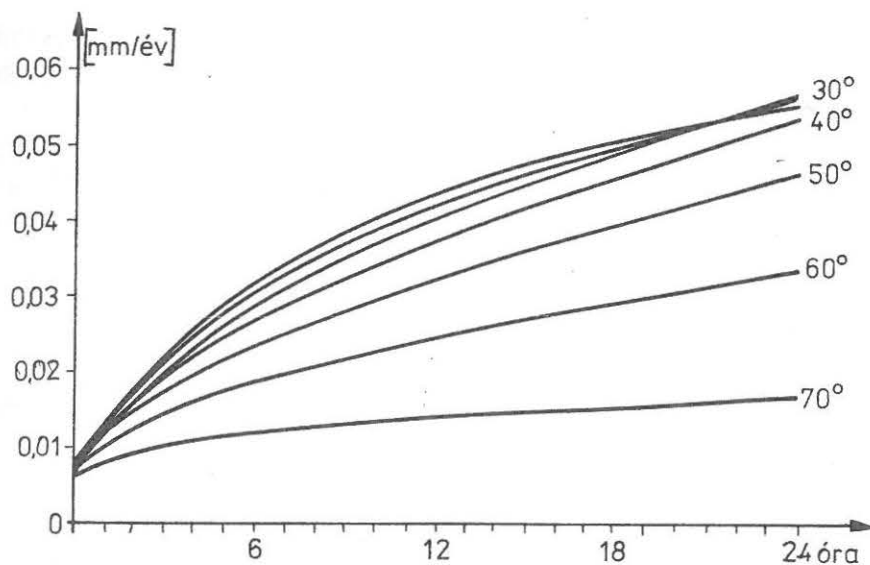
A 6. ábrán a leoldódási sebességet a lejtőszög függvényében különböző csapadékhozamok mellett ábrázoltuk. Jól látható, hogy a denudáció és a csapadékhozam között nincs egyenes arányosság: a  $\dot{b}(q_v)$  függvény meredeksége nagyobb csapadékhozamok esetén kisebb. Azaz kétszer akkora évi csapadékhozam nem eredményez kétszer akkora lepusztulást, hanem csak kevesebbet. Ez azzal magyarázható, hogy nagyobb csapadékhozam esetén gyorsabban lefolyik a víz a mészkőről, így kevesebb ideje marad az oldásra. E megállapítást az is igazolja, hogy nagy lejtőszögeknél (az éves csapadékhozamtól függetlenül) kisebb a leoldódás éves mértéke.



6. ábra. A leoldódási sebesség az éves csapadékhozam függvényében, különböző lejtőszögek esetén ( $x=5\text{ m}$ ,  $\beta=90^\circ$ )  
 Fig. 6. Velocity of denudation as a function of annual precipitation by different angle of slope ( $x=5\text{ m}$ ,  $\beta=90^\circ$ )



7. ábra. A leoldódás sebessége az esőcseppek pályájának dőlésszögétől függően, különböző lejtőszögek esetében ( $x=5\text{ m}$ ,  $q_v=6,34 \cdot 10^{-3}\text{ kg/s}$  [azaz  $Q=2000\text{ mm/év}$ ])  
 Fig. 7. Velocity of denudation as a function of direction of rainfall by different angle of slope ( $x=5\text{ m}$ ,  $q_v=6,34 \cdot 10^{-3}\text{ kg/s}$  [i.e.  $Q=2000\text{ mm/year}$ ])



8. ábra. A leoldódási sebesség a napi működési idő függvényében, különböző lejtőszögek esetében ( $x = 5$  m,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [azaz  $Q = 2000$  mm/év])  
 Fig. 8. Velocity of denudation as a function of a daily period of time of rainfall by different angle of slope ( $x = 5$  m,  $\beta = 90^\circ$ ,  $q_v = 6,34 \cdot 10^{-5}$  kg/s [i.e.  $Q = 2000$  mm/year])

A 7. ábra a leoldódás sebességét az esőcseppek pályájának dőlésszögétől függően mutatja, különböző lejtőszögek esetén. Szembeötlő, hogy  $\alpha < 45^\circ$  esetén mennél meredekebb az esőcseppek esési iránya (azaz mennél közelebb vannak a függőleges helyzethez), annál nagyobb a leoldódás sebessége. Kis lejtésű területek denudációja közel vízszintesen repülő esőcseppek esetén igen csekély. Ezen az ábrán is kitűnik, hogy az  $\alpha \approx 45^\circ$  lejtések esetén a legnagyobb a korrózió mértéke, szinte függetlenül attól, hogy milyen irányból hullik a csapadék. Viszont nagy meredekségű térszíneken a laposan repülő vízcseppek fejtenek ki hatékony oldást. Tehát bizonyítva látszik az a (chilei karmezőkön megfigyelt) megállapítás, hogy a viharos szélben közel vízszintesen szálló esőcseppek gyorsan hátráló, meredek mészkőfelületeket hoznak létre, (aminek következtében igen különös formakincs áll elő).

Végül a 8. ábrán az eső intenzitásának hatása látható, ahol a leoldódási sebességet a napi működési idő függvényében tüntettük fel, azonos (2000 mm/év hozamú) csapadék esetére. Egyértelműen látszik, hogy ugyanaz a vízmennyiség hosszú időre elnyújtva hatékonyabb oldódást tesz lehetővé. Azaz számításaink szerint a tartós esőzés hosszú távon több  $\text{CaCO}_3$  feloldásával jár, mint a rövid, heves esőzés. (Természetesen ha az évi csapadékho-



zam nagyobb, akkor a leoldódás is nagyobb lesz). E jelenség valószínűleg azzal magyarázható, hogy a nagy hozamú esők igen gyors, bővizű leöblítést eredményeznek, így viszonylag kevés idejük marad az oldásra. Ezt követően pedig hosszú, csapadékmentes időszakok következnek, amikor egyáltalán nincs oldódás. Ezzel szemben a lassú, csendes esőzés időegység alatt kevesebb mészkövet old fel ugyan, de a csökkenés nem olyan mértékű, mint amennyi nyereség származik a hosszú működési időből.

## IRODALOM

- DREYBROT, W.* (1988): Processes in Karst Systems. - Springer-Verlag. 283.p. Berlin, 1988
- DUBLJANSZKI, J. V.* (1989): A víztükör alatti gömbfülke-képződés elméleti vizsgálata - Karszt és Barlang I-II. p.29-31
- JAKUCS L.* (1971): A karsztok morfogenetikája. - Akadémiai kiadó, Budapest, 1971
- SZUNYOGH G.* (1994): Szabad, talajjal nem borított mészkőfelszín karsztosodásának általános egyenletrendszere - Karsztfejlődés I. (Totes Gebirge karrjai). Pauz kiadó, Celldömölk. p. 145-164
- SZUNYOGH G.* (1995): Mészkőfelszíni alakzatok kialakulásának fizikája - Studia Physica Savariesia. III. Szombathely, 1995. p. 9.1-9.11
- SZUNYOGH G.* (1998): Sziklakarrok karsztosodásának matematikai modellezése - Karsztfejlődés II. (A Totes Gebirge karrjai). Szombathely, p. 7-34
- SZUNYOGH, G.* (2000a): Differential Equations Describing the Changes Of Shape Caused by Karst Corrosion of any Arbitrary Limestone Surface - Karsztfejlődés IV. Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 151-174
- SZUNYOGH, G.* (2000b): The Theoretical-Physical Study of the Process of Karren Development - Karsztfejlődés IV. BDTF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 125-150
- VERESS M.-PÉNTEK K.* (1990): Kísérlet a karsztos felszínnek denudációjának kvantitatív leírására - Karszt és Barlang I. p. 19-28
- VERESS M.-PÉNTEK K.* (1992): Felszíni karsztos formák vizsgálata matematikai módszerekkel - Oktatási intézmények karszt és barlangkutató tevékenységének II. országos konferenciája, Szombathely. p.21-29
- VERESS M.* (1993): Egy totes gebirgei-i nagy karvályú kioldódástörténeti vázlata - Karszt és Barlang 1-2. p.21-28.
- VERESS, M.-PÉNTEK, K.* (1998): Modelling Karst Surface Evolution: Quantitative Description of Surface Vertical Karstification. - Windows on Hungarian Geography, Studies in Geography in Hungary 28, p. 53-69.



*VERESS, M.* (2000): The main types of karren development of limestone surfaces without soil covering - Karsztfejlődés IV. BDTF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 7-30.

*VERESS M.-TÓTH G.-PÉNTEK K.* (2001): Adalékok karrformák kialakulási korához és fejlődési sebességéhez a Hallstatt-gleccser jégmentes völgytalpán - Karsztfejlődés VI. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p.161-169.

*VERESS M.* (2002): Talaj nélküli sziklafelszínek néhány karros jelensége és az ezek hatására képződő karrformák - Földrajzi értesítő. - 51.1-2. p.41-71.

