KARSZTFEJLŐDÉS VII.
Szombathely, 2002. pp. 73-86.

A KARSZTOS LEPUSZTULÁS SEBESSÉGÉNEK KISZÁMÍTÁSA EGY TÖRMELÉKES OLDÓDÁSI ZÓNA ADATAINAK FELHASZNÁLÁSÁVAL

PÉNTEK KÁLMÁN[1] – VERESS MÁRTON[2]

[1]Berzsenyi Dániel Főiskola, Matematika Tanszék pentek@fs2.bdtf.hu,
[2]Berzsenyi Dániel Főiskola, Természetföldrajzi Tanszék vmarton@fs2.bdtf.hu
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.

Abstract: By using the mathematical model of the horizontical karstification we determine the relocity of the denudation the karst area. We could get at the value of the denudation velocity as $5.6 \cdot 10^{-3}$ mm/year, if we took into account 1000 hours/year solutional period.

1. Bevezetés

A karsztosodó mészkő térszínek karsztos lepusztulásának morfológiai modelljét *VERESS M.*, míg matematikai modelljét *PÉNTEK K.* hozta létre (*VERESS M.–PÉNTEK K.* 1990, 1994, 1996 és *PÉNTEK K.* 1998). A modell finomítását *PÉNTEK K.* (2001) végezte el, aki a korábbi leírás lényeges elemeit megtartotta, viszont a továbbfejlesztett matematikai megfogalmazás pontosabban illeszkedik a jelenség morfológiai modelljéhez. A finomított modell alkalmas viszonylag kis számú, terepi munkával meghatározható paraméter ismeretében az adott karsztos térszín lepusztulási sebességének meghatározására.

A karsztos felszín lepusztulási sebességét több kutató is vizsgálta. Így például *BÖGLI, A.* (1961) a karrasztalok mérésével, *CUCCHI, F.–FORT*, F.–*MARINETTI, E.* (1996) a kőzetbe épített fémcsapok magasságának újramérésével, *TRUDGILL, S. T.* (1975, 1985), *KASHIMA, N.* et. al (1996) a vizsgált területre kihelyezett mészkő tabletták súlyának újramérésével határozták meg az adott terület denudációs sebességét. *ZÁMBÓ L.* (1986) és *ZÁMBÓ L.–FELVIN L.* (2000) a talaj-hatás mérésével közvetett módszert adott a karsztos pusztulás sebességének becslésére.

Az alábbiakban bemutatjuk azt a módszert, amelynek segítségével *PÉNTEK K.* (2001) dolgozatában nyert összefüggésekből kiindulva ténylegesen elvégezhető a karsztos denudáció sebességének kiszámítása. Így tehát jelen dolgozat *PÉNTEK K.* (2001) munkája szerves folytatásának tekinthető,

s az ott bevezetett jelöléseket használjuk az egyes fizikai mennyiségek megnevezésére. E dolgozat önálló érthetősége érdekében azonban tömören összefoglaljuk jelen mondandónk megértéséhez szükséges legfontosabb előzményeket.

2. A geomorfológiai és a matematikai modell

A geomorfológiai modell kezdeti feltétele egy talajréteggel fedett, repedezett mészkő összlet. A talajon átszivárgó csapadékvíz széndioxiddal feldúsulva hatol be a mészkő repedezett felső tartományába, ahol tovább haladva lefelé oldással szélesíti a repedéseket, miközben telítődik. E folyamat eredményeként a kőzet felső tartományából kifejlődik az adott térszínre jellemző vastagságú törmelékdarabokból álló zóna. Ezen törmelékes zóna folyamatosan eltolódik lefelé, s ez a térszín alacsonyodását eredményezi, ugyanis a zóna felső részén az agresszív oldószer hatására a törmelékdarabkák feloldódnak. Ezáltal a kőzetbe szivárgó víz telítődési határa a szálban álló kőzetbe lefelé tolódik el, ezért a zóna alulról a szálkőzetből pótlódik.

E vázlatosan ismertetett geomorfológiai modell matematikai leírása során a karsztos oldás *NERNST, W.* (1904) által felállított

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot S(C_e - C) \tag{1}$$

differenciálegyenletet alkalmaztuk. Itt m = a mészkő oldásnak kitett felületéről eltávozott tömeg, t = a mészkő oldásának időtartama, k_K = kémiai oldás sebességi állandója, k_T = határrétegben végbemenő anyagtranszport sebességi állandója, S = az oldódó mészkő felülete, C_e a feloldott kalciumkarbonát egyensúlyi koncentrációja és végül C az oldat aktuális kalciumkarbonát koncentrációja.

A matematikai modellben a törmelékes oldódási zónát szabályos kockarácsban elhelyezkedő gömb alakú mészkő törmelékdarabkákból építettük fel, amelyek a kőzet tényleges töredezettségére jellemző a átmérővel rendelkeznek, s n számú horizontális rétegben helyezkednek el. Feltételezzük, hogy ha d vastagságú a törmelékes oldódási zóna, akkor a lefelé haladó oldószer a

$$C(x) = \frac{x}{d} \cdot C_e \qquad (0 \le x \le d) \tag{2}$$

lineáris függvény szerint telítődik, ahol x jelenti a zóna felső határától mért mélységet. Pontosabban szólva a (2) alakú függvényt az egyes horizontális gömbrétegek határán ugró

$$(3) \qquad C(x) = \frac{2k-1}{2n} \cdot C_e \qquad \left((k-1)\cdot a \le x < k\cdot a,\ 1 \le k \le n\right)$$

alakú lépcsős függvénnyel közelítjük.

Alulról felfelé haladva az egyes rétegekben levő $R_n, R_{n-1}, ..., R_1$ sugarú törmelék gömbök oldódási folyamatát a következő alakú egyenletekkel írhatjuk le:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t &= \frac{R_n - R_{n-1}}{k_K} + \frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}, \\ \frac{3}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t &= \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{k_K} + \frac{8}{85}\cdot\frac{R_{n-1}^2 - R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}, \\ &\vdots \\ \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t &= \frac{R_1 - R_0}{k_K} + \frac{8}{85}\cdot\frac{R_1^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}. \end{aligned}$$

A fenti n számú összefüggésekben ρ = a mészkő sűrűsége, Δt= tiszta oldódási szakasz időtartama, D = diffúziós állandó és ν = az áramló oldószer kinematikai viszkozitási tényezője. A matematikai modell részletei, a (4) alatti összefüggések részletes levezetése *PÉNTEK K.* (2001) dolgozatában megtalálható.

3. A törmelékgömbök sugarainak meghatározása

A továbbiakban a (4) összefüggésekből kiindulva meghatározzuk az ideális törmelékes oldódási zóna egyes rétegeiben található törmelékgömbök $R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, ..., R_1, R_0$ sugarát. Ehhez első lépésként képezzük rendre a (4) alatti egyenletekből az első, majd az első kettő, ezután az első három, ..., végül az első n számú, vagyis az összes egyenlet összegét. Ekkor a következő formulákat nyerjük:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_{n-1}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\frac{1+3}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_{n-2}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\vdots\\
&\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_0}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_0^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}.
\end{aligned}
$$

Most használjuk fel, hogy az első k darab páratlan szám összege k^2, ezzel az (5) összefüggések alakja:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_{n-1}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\frac{2^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_{n-2}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\vdots\\
&\frac{n^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_n-R_0}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2-R_0^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}.
\end{aligned}
$$

Válasszuk szét ezután a (6) egyenletekben a jobb oldalon a megegyező indexek szerint a törmelékgömbök sugarait tartalmazó tagokat. Ekkor nyerjük a

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\left[\frac{R_n}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right]-\left[\frac{R_{n-1}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right],\\
&\frac{2^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\left[\frac{R_n}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right]-\left[\frac{R_{n-2}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right],\\
&\vdots\\
&\frac{n^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\left[\frac{R_n}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_n^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right]-\left[\frac{R_0}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_0^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}\right]
\end{aligned}
$$

összefüggéseket. Mivel $R_0 = 0$ a teljesen feloldódott törmelékgömb sugara, így a (7) utolsó formulája jobb oldalán a második zárójelben szereplő mennyiség 0. Vonjuk ki ezután rendre a (7) utolsó összefüggéséből az elsőt, az utolsó összefüggésből a másodikat, ..., végül az utolsóból az utolsó előttit. Ekkor az

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{n^2-1^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_{n-1}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\frac{n^2-2^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_{n-2}}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}},\\
&\vdots\\
&\frac{n^2-(n-1)^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=\frac{R_1}{k_K}+\frac{8}{85}\cdot\frac{R_1^2}{\sqrt[3]{D^2\nu}}
\end{aligned}
$$

összesen n-1 számú összefüggést nyerjük. Láthatjuk, hogy a (8) alatti egyenletek mindegyike az egyes törmelékgömbök sugarait határozza meg egy-egy másodfokú algebrai egyenlet által. Ezen egyenleteket az ismeretlen törmelékgömbök sugarának csökkenő hatványai szerint elrendezve kaphatjuk rendre a következő összefüggéseket:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{8}{85\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}\cdot R_{n-1}^2+\frac{1}{k_K}\cdot R_{n-1}-\frac{n^2-1^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=0,\\
&\frac{8}{85\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}\cdot R_{n-2}^2+\frac{1}{k_K}\cdot R_{n-2}-\frac{n^2-2^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=0,\\
&\vdots\\
&\frac{8}{85\cdot\sqrt[3]{D^2\nu}}\cdot R_1^2+\frac{1}{k_K}\cdot R_1-\frac{n^2-(n-1)^2}{2n}\cdot\frac{C_e}{\rho}\cdot\Delta t=0.
\end{aligned}
$$

Bár ezen n-1 számú másodfokú algebrai egyenlet algebrailag megoldható, s ebből $R_{n-1}, R_{n-2}, ..., R_1$ sugarak meghatározhatók, azonban az együtthatókat megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy

$$(10) \qquad \frac{8}{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}} >> \frac{1}{k_K},$$

így jó közelítéssel eltekinthetünk az ismeretlenek lineáris tagjaitól a (9) összefüggésekben. Ekkor tehát a

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{8}{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}} \cdot R_{n-1}^2 - \frac{n^2 - 1^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = 0, \\ &\frac{8}{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}} \cdot R_{n-2}^2 - \frac{n^2 - 2^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{8}{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}} \cdot R_1^2 - \frac{n^2 - (n-1)^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = 0 \end{aligned}$$

egyenleteket nyerhetjük, amelyekből rendre a törmelékgömbök sugárnégyzetei a (7) utolsó formuláját is felhasználva a fentivel analóg elhanyagolással:

$$(12) \qquad \begin{aligned} R_n^2 &= \frac{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}}{8} \cdot \frac{n^2 - 0^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t, \\ R_{n-1}^2 &= \frac{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}}{8} \cdot \frac{n^2 - 1^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t, \\ R_{n-2}^2 &= \frac{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}}{8} \cdot \frac{n^2 - 2^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t, \\ &\vdots \\ R_1^2 &= \frac{85 \cdot \sqrt[3]{D^2 \nu}}{8} \cdot \frac{n^2 - (n-1)^2}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Most pedig az utolsó összefüggésnek az elsővel, az utolsó előttinek az elsővel, ..., végül a másodiknak az elsővel való elosztásakor az egyes sugárnégyzeteknek a legalsó gömbréteg sugárnégyzetéhez való viszonyát nyerhetjük:

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
\frac{R_1^2}{R_n^2} &= \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2-0^2}, \\
\frac{R_2^2}{R_n^2} &= \frac{n^2-(n-2)^2}{n^2-0^2}, \\
&\vdots \\
\frac{R_{n-1}^2}{R_n^2} &= \frac{n^2-1^2}{n^2-0^2},
\end{aligned}
$$

Ezen (13) alatti összefüggésekből pedig négyzetgyök vonása, majd az $R_n = \frac{a}{2}$ értékkel történő megszorzással megkaphatjuk az ideális törmelékes oldási zóna egyes rétegeiben található törmelékgömbök sugarait felülről lefelé haladva:

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}\cdot R_n = \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}\cdot\frac{a}{2}, \\
R_2 &= \frac{\sqrt{n^2-(n-2)^2}}{n}\cdot R_n = \frac{\sqrt{n^2-(n-2)^2}}{n}\cdot\frac{a}{2}, \\
&\vdots \\
R_{n-1} &= \frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n}\cdot R_n = \frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n}\cdot\frac{a}{2}, \quad \text{továbbá} \\
R_n &= \frac{\sqrt{n^2-0^2}}{n}\cdot R_n = R_n = \frac{a}{2} \quad \text{és} \quad R_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Példaként tekintsünk egy olyan ideális törmelékes oldási zónát, amelynek vastagsága $d = 1$ m, a legalsó rétegben található gömbök átmérője $a = 0{,}1$ m, s így a rétegek száma $d = n \cdot a$ alapján $n = 10$. Ekkor a (14) összefüggések alapján az egyes rétegekben levő törmelékgömbök sugarai az *I. táblázatban* találhatók. A táblázat adataiból pedig már megszerkeszthetjük az $R = R(x)$ függvény grafikonját, amelyet az *1.* ábrán láthatunk.

A karsztos térszínek morfometriai vizsgálatánál alapvető jelentőséggel bír a lepusztulás becslése, illetve sebességének meghatározása. A denudációs sebesség kiszámításának fő problémáját a törmelékzónát képező karsztosodás esetén az jelenti, hogy nem ismerjük a törmelékes zónába be-

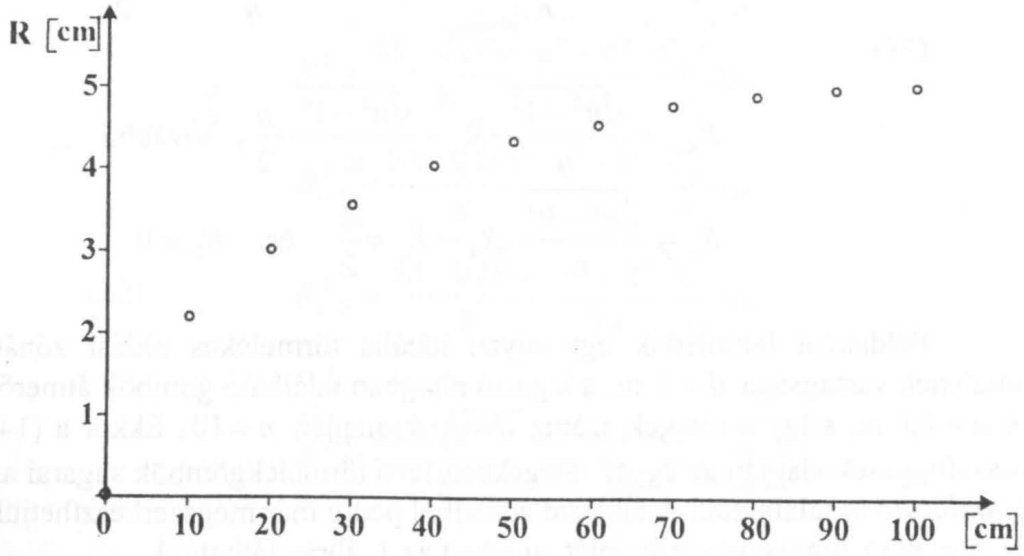
lépő és felül még agresszív, majd lefelé szivárogva az oldás folytán folyamatosan telítődő $C = C(x)$ függvényt, amelynek egyik lehetséges lineáris megközelítését a (2) formulában találhatjuk.

I. táblázat.
Table I.

Ideális törmelékes oldási zóna törmelék gömbjeinek sugara a zóna felső határától való mélység függvényében
In this case (theoratically) the radius of sphericals shape pieces of the solution zone depend on from the depth

$x[m]$	$R(x)$ $[m]$
0	0
0,1	$2{,}15 \cdot 10^{-2}$
0,2	$2{,}98 \cdot 10^{-2}$
0,3	$3{,}56 \cdot 10^{-2}$
0,4	$3{,}99 \cdot 10^{-2}$
0,5	$4{,}32 \cdot 10^{-2}$
0,6	$4{,}58 \cdot 10^{-2}$
0,7	$4{,}77 \cdot 10^{-2}$
0,8	$4{,}89 \cdot 10^{-2}$
0,9	$4{,}97 \cdot 10^{-2}$
1,0	$5{,}00 \cdot 10^{-2}$

Megjegyzés: Itt d=1 m, a=0,1 m, n=10
Noticed: Here is d=1 m, a=0,1 m, h=10



1. ábra: Az I. táblázat adataiból szerkesztett elméleti R=R(x) függvény grafikonja
Fig. 1. The diagram of the function R=R(x) which was created from the data of the Table I.

A 3. fejezetben bemutatott számításainkat felhasználva azonban a $C = C(x)$ függvény explicit alakjának ismerete nélkül is kiszámíthatjuk a denudációs sebességet. Ehhez csupán a törmelékes oldódási zóna geometriai jellemzőit kell meghatározni a vizsgált karsztos terület természetes, vagy mesterséges vertikális feltárulásánál.

A karsztos térszín denudációs sebessége modellünk alapján a

$$C = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{C_e \cdot d}{2\rho} \cdot \left(\frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right)^{-1} \tag{15}$$

összefüggéssel határozható meg (*PÉNTEK K.* 2001). A (15) formulában szereplő paramétereket az alábbi típusokba sorolhatjuk:

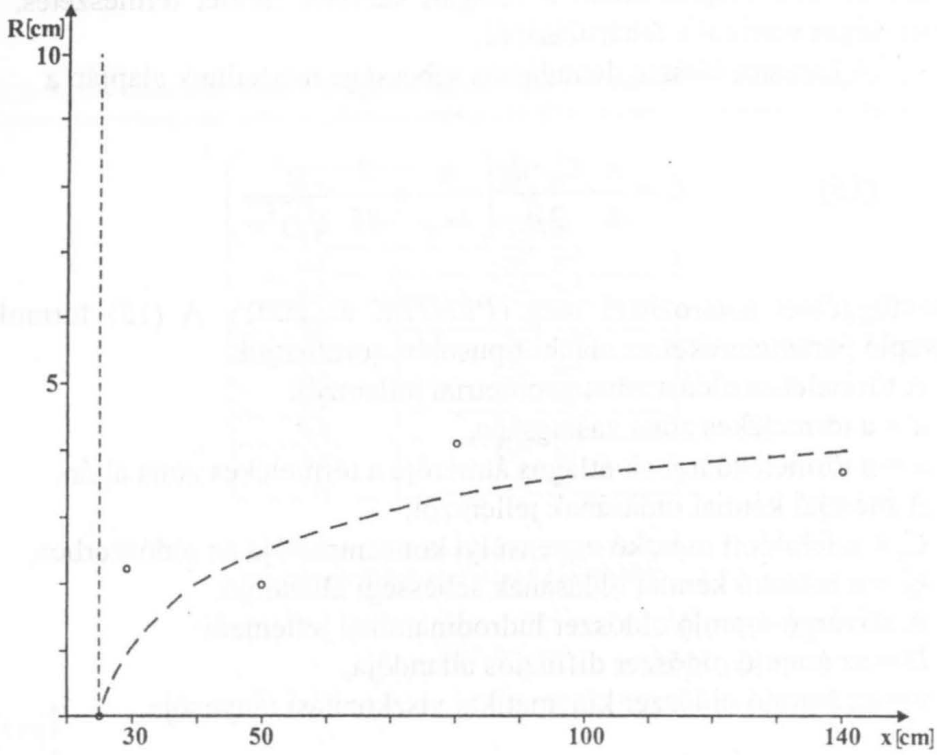
a) A törmelékes oldási zóna geometriai jellemzői:
   d = a törmelékes zóna vastagsága,
   a = a törmelékdarabok átlagos átmérője a törmelékes zóna alján.
b) A mészkő kémiai oldásának jellemzői:
   C_e = a feloldott mészkő egyensúlyi koncentrációja az oldószerben,
   k_K = a mészkő kémiai oldásának sebességi állandója.
c) A szivárgó-áramló oldószer hidrodinamikai jellemzői:
   D = az áramló oldószer diffúziós állandója,
   ν = az áramló oldószer kinematikai viszkozitási tényezője.

4. Mintavétel és az adatfeldolgozás módszere

Vizsgáljuk most meg sorjában a (15) formulában szereplő paramétertípusokat, hogy milyen módszerrel tudjuk értéküket meghatározni, illetve kielégítő pontossággal becsülni.

A törmelékes zóna több feltárulását is tanulmányozhatjuk az E 71 országút útbevágásainál (Horvátország, Plitvicei-tavaktól északra). Az útbevágás által feltárt egyik törmelékes zónát – amely geomorfológiai helyzete miatt környezetéből törmelék anyagot nem kaphat – mintáztuk meg. (Földrajzi koordinátái $\varphi = 44° 59' 55{,}4''$; $\lambda = 15° 45' 42{,}8''$; magassága $h = 308\ m$.) Az összletek a következők fentről lefelé haladva: 1. talaj, 2. mállási maradék, 3. mállási maradék törmelékkel, 4. tömbökre különült kőzet mállási maradék nélkül, 5. szálkőzet. Ezen összletek közül a törmelékes zóna d vastagságával a 3. alatt szereplő réteg vastagsága azonosítható. Az ezen zónából vett mintasorozat feldolgozásával ábrázolhatjuk a zóna felső határától mért x mélység függvényében az ott található törmelékdarabok átlagos átmérőjének felét, vagyis a gömbnek tekintett törmelékdarabok kiátlagolt sugarát. E suga-

rakat összevetve a (14) összefüggésekben mért sugarakkal az a paraméter megadható.



2. ábra: A horvátországi felmérés adataiból szerkesztett R=R(x) függvény grafikonja
Fig. 2. The diagram of the function R=R(x) which was consturted from the data of the creation measurements

A mintavétel módszere az alábbi volt: felülről lefelé haladva 20 centiméterenként véletlenszerűen kb. 30-40 db törmelékdarabot emeltünk ki. A minták anyagát a következő módon dolgoztuk fel: megmértük az egyes törmelékdarabok átmérőjét három, páronként egymásra merőleges, a törmelék alakjára jellemző irányban. Ezen átmérők átlagát képezve meghatároztuk a törmelékzóna adott mélységében a képzeletben gömb alakúra transzformált törmelékdarab átmérőjét, majd ezt felezve nyertük a megfelelő törmelékgömb sugarát. E sugár értékét ábrázoltuk a zóna felső határától mért mélység függvényében. Így nyertük a *2. ábrán* szereplő függvényt, amelyből látható, hogy elméleti modellünk alkalmazható és keresett paramétereink értéke: $d = 1{,}25\,\mathrm{m}$, $a = 0{,}08\,\mathrm{m}$.

A mészkő oldása kémiai folyamatát vizsgálva *DUBLJANSZKIJ J. V.* (1987) szerint a kőzet felületéről leoldott mészkő oldatban levő egyensúlyi koncentrációja meghatározható a

(16) $$C_e = A_C \cdot T + B_C$$

képlet alapján, ha $A_C = -7{,}58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \,°\text{K}}$, $B_C = 3{,}92 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ és T jelenti az oldat abszolút hőmérsékletét. A T = 283° K = 10° C értékkel számolva az oldat egyensúlyi koncentrációjára a

(17) $$C_e = 1{,}77486 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

érték adódik. A mészkő karsztos oldása (1) alatti differenciálegyenletében fellépő kémiai oldás sebességi állandóját *DUBLJANSZKIJ, J. V.* (1987), *RICKARD, D. – SJÖBERG, E. L.* (1983, 1984) alapján a

(18) $$k_K = A_K \cdot e^{-\frac{E_K}{R' \cdot T}}$$

formulával határozhatjuk meg, ahol

$A_K = 5{,}36 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_K = 5{,}41 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$ és $R' = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol°K}}$.

A fenti T = 283° K = 10° C értéknél a kémiai oldás sebességére nézve a

(19) $$k_K = 5{,}53749 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értéket nyerjük.

A karsztos oldás hidrodinamikai jellemzőit vizsgálva szintén *DUBLJANSZKIJ, J. V.* (1987) és *RICKARD, D. – SJÖBERG, E. L.* (1983, 1984) nyomán a diffúziós állandót kiszámíthatjuk a

(20) $$D = A_D \cdot e^{-\frac{E_D}{R' \cdot T}}$$

képlettel, ha $A_D = 2{,}37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $E_D = 3{,}72 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$. A szokásos T = 283° K = 10° C hőmérsékleten dolgozva a diffúziós állandóra a

(21) $$D = 3{,}22346 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

értéket kaphatjuk. Az áramló oldat kinematikai viszkozitásához *DUBLJANSZKIJ, J. V.* (1987), valamint *RICKARD, D. – SJÖBERG, E. L.* (1983, 1984) eredményeit felhasználva

$$\nu = A_\nu \cdot e^{\frac{E_\nu}{R' \cdot T}} \tag{22}$$

formulát használhatjuk, ahol $A_\nu = 2{,}59 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$, $E_\nu = 1{,}46 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$, s válasszuk a rendszerre jellemző $T = 283°$ K = 10° C hőmérsékletet. Ekkor

$$\nu = 1{,}28288 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \tag{23}$$

adja meg a karsztos oldást megvalósító oldat kinematikai viszkozitási tényezőjét.

Megemlítjük, hogy a (18), (20) és (22) összefüggések az Arrhenius egyenletek, továbbá R' az egyetemes gázállandó és $\rho = 2700 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a mészkő sűrűsége. A fentiekben kiszámított értékeket a (15) formulába helyettesítve már könnyen kiszámíthatjuk vizsgált helyszínen a denudáció sebességének számértékét, amelyre

$$c = 1{,}36 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4{,}897 \cdot 10^{-2} \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{h}} \tag{24}$$

adódik. E sebesség azonban folyamatos karsztos oldással (oldódási időtartam) számol, noha a folyamat az oldószer hiányában leáll. Ha azonban korábbi módszerünknek megfelelően éves viszonylatban megállapítunk a csapadékadatok tanulmányozása alapján egy, az adott területen reális

$$\eta = 1000 \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{év}}, \tag{25}$$

az oldási időtartamnak a teljes év hosszához viszonyított arányossági tényezőjét, akkor megkaphatjuk annak a karsztos térszínnek a lepusztulási sebes-

ségét, ahonnan a törmelékes zónát mintáztuk és a törmelékdarabok méreteit meghatároztuk. A denudációs sebesség értéke a fentiek alapján:

$$c_\eta = \eta \cdot c = 5{,}6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{év}}, \tag{26}$$

ami más szavakkal azt jelenti, hogy nagyjából 180 év alatt süllyed a vizsgált terület 1 mm értéket.

Megjegyezzük, hogy a fentiekben bemutatott számpéldánk eredményében továbbra is jelentős méretű bizonytalanság rejtőzik. Figyeljük meg ugyanis, hogy kis területen belül is komoly inhomogenitások tapasztalhatók a törmelékdarabok mélység szerinti eloszlásában, illetve a törmelékes oldási zóna vastagsága is helyről helyre változhat. Szeszélyesebb csapadékeloszlás, nagyobb, vagy kisebb mennyiségű hó olvadása is jelentős befolyásoló tényező a karsztosodó aktív és inaktív időszakok meghatározásakor.

5. Eredmények

Dolgozatunkat egy olyan modellre alapoztuk, amely lényegében megragadja és matematikailag is kiszámíthatóvá teszi a karsztos térszínek denudációs sebességét (*PÉNTEK K.* 2001). A jelen dolgozatban bemutatott részletes numerikus példa tanúsága szerint jó megközelítése a valóságnak egy olyan telítődési függvény elfogadása, amely (2) formulában található. Természetesen nem kizárt, hogy egy nem lineáris függvénnyel jellemezhető telítődési függvénnyel egy adott másik karsztos térszín lepusztulási folyamata pontosabban leírható.

Számításaink eredményeként azt találtuk, hogy a vizsgált területen a karsztos denudáció sebessége 1000 óra/év oldódási időtartamot feltételezve $5{,}6 \cdot 10^{-3}$ mm/év, ami azt jelenti, hogy e sebesség nagyságrendjét tekintve jó egyezést mutat a bevezetésben említett szerzők más módszerrel nyert sebességi adataival.

Matematikai modellünk kidolgozása során mindvégig igyekeztünk lehetőség szerint egyszerűségre törekedni, éppen a felhasználói oldal számára elősegítendő a könnyebb alkalmazhatóságot. Kívánatos törekvésünk a jövőben, hogy dolgozatunkban ismertetett matematikai modellünket minél több karsztos területen kipróbáljuk, s így lehetőségünk legyen megbizonyosodni annak eredményes használhatóságáról.

IRODALOM

BÖGLI, A. (1961): Karrentische, ein Beitrag zur Karstmorphologie – Zeitschrift für Geomorphologie. 5. p. 185-193.

CUCCHI, F.–FORT, F.–MARINETTI, E. (1996): Surface degradation of carbonate rocks in the karst of Trieste (Classical Karst, Italy). – In: *FORNÓS, I. J.–GINÉS, A.* (szerk.): Karren Landforms, p. 41-51, Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca

DUBLJANSZKIJ, J. V. (1987): Teoreticseszkoje modelirovanije dinamiki formirovanija gidrotermokarsztovüh polosztyej – Metodi i izucsenyija geologicseszkih javlenyij, Novoszibirszk p. 97-111.

KASHIMA, N.–URUSHIBARA–YOSHINO, K. (1996): Karren development. Solutional erosion measurements by the limestone-tablet method in Shikoku Island, Southwest Japan – In: *FORNÓS, I. J. – GINÉS, A.* (szerk.): Karren Landforms, p. 65-73, Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca

NERNST, W. (1904): Teorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen II. – Zeitschrift für Physikalische Chemie. 47. p. 52-55.

PÉNTEK, K. (1988): Néhány karsztos folyamat matematikai leírása – Ph.D. disszertáció. JATE, TTK

PÉNTEK K. (2001): Karsztosodó mészkő térszínek lepusztulásának matematikai modellje – Karsztfejlődés VI. BDF Természetföldrajzi Tanszék, Szombathely, p. 13-25.

RICKARD, D.–SJÖBERG, E. L. (1983): Mixed kinetic control of calcite dissolution rates – American Journal of Science, Vol. 283. p. 815-830.

RICKARD, D.–SJÖBERG, E. L. (1984): Temperature dependence of calcite dissolution kinetics between 1 and 62°C at pH 2,7 to 8,4 in aqueous solutions – Geochimica et Cosmochimica Acta. Vol. 48. p. 485-493.

TRUDGILL, S. T. (1985): Limestone geomorphology – Logman, New York

VERESS M.–PÉNTEK K. (1990): Kísérlet a karsztos felszínek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.

VERESS M.–PÉNTEK K. (1994): Néhány karsztos folyamat leírása a fizikai-kémiai hidrodinamika alapján – BDTF Tudományos Közleményei IX. Természettudományok IV. Szombathely, p. 19-42.

VERESS M.–PÉNTEK K. (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.

ZÁMBÓ L. (1986): A talaj-hatás jelentősége a karszt korróziós fejlődésében – Kandidátusi disszertáció, MTA Könyvtár, Kézirat

ZÁMBÓ L.–FELVIN L. (2000): Relationshipp of soil effect in karst corrosion and karren development – Annales Szegediensis (megjelenés alatt)