

KARSZTOSODÓ MÉSZKŐ TÉRSZÍNEK LEPUSZTULÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLJE

PÉNTEK KÁLMÁN

Berzsenyi Dániel Főiskola, Matematika Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4. pentekk@fs2.bdtf.hu

Abstract: The paper presents the mathematical description of the horizontal karstification process, which occurs in the zone of debris of surface of limestone.

1. Bevezetés

A mészkő pusztulása a dolomit denudációjához hasonlóan a térben két, egymástól elkülönülő tartományban, a felszínen és az áramló karsztvíz övében játszódik le (BÖGLI, A. 1963, JAKUCS, L. 1971). A karsztos felszín lepusztulása is két, lényegesen különböző módon mehet végbe a beszivárgó csapadékvizek hidrokarbonátos oldásának hatására: a többrös formakincset létrehozó horizontális karsztosodással (VERESS, M. – PÉNTEK, K. 1990, 1994, 1996, PÉNTEK, K. 1998), továbbá a hasadékok, kürtők és aknák rendszerét kialakító vertikális karsztosodással (VERESS, M. – PÉNTEK, K. 1994, 1995, 1998).

Ebben a dolgozatban a horizontális karsztos formakincset eredményező folyamatok matematikai leírásával foglalkozunk, amelynek alapja a karsztos oldás általános differenciálegyenlete, amelyet lényegében ebben a formában NERNST, W. (1904) fogalmazott meg. A tárgyalandó matematikai modell segítségével meghatározhatjuk a karsztos térszín denudációjának sebességét, kifejlődési korát, sőt múltbeli és jövőbeni állapotát is.

2. Geomorfológiai modell

A horizontális karsztosodás geomorfológiai modelljének felépítése során egy talajréteggel borított, repedezett mészkő térszínből indulunk ki. A talajrétegen áthaladó csapadékvíz széndioxiddal feldúsul, mire eléri a kőzet felszínét. A kőzetbe szivárgó víz oldóhatása révén szélesíti a repedéseket, s miközben lefelé halad, fokozatosan telítődve elveszti oldóképességét. A kőzet a térben minden irányban kifejlődött repedések mentén végbemenő oldás

hatására törmelékdarabokra különül, ezzel kifejlődik a szálkőzet felső tartományából a törmelékes oldási zóna.

A szálkőzetből leszakadó törmelékdarabok nagyságát a kőzet repedezettségi mértéke határozza meg. A törmelékdarabok mérete a szálkőzettől felfelé távolodva fokozatosan csökken. Ez egyrészt azzal magyarázható, hogy a törmelékes zóna felső részén található törmelékdarabok korábban szakadtak le a szálkőzetről, másrészt a zóna felső tartományában legintenzívebb az oldási folyamat, hiszen itt a leginkább agresszív az oldószer. A törmelékdarabok oldódásuk során legömbölyödnek, méretük egyre csökken, amíg végül teljesen feloldódnak, eközben viszont az egyes darabok térbeli helyzete lényegében nem változik.

A törmelékes zóna folyamatosan tolódik lefelé azáltal, hogy az oldószer hatására a zóna felső részén eltűnnek a teljesen feloldott törmelékdarabok. A még nem teljesen telítődött oldószer a szálkőzet felső tartományába nyomul, s így a törmelékes zóna a szálkőzet aprózódásával alulról pótlódik. Ha az oldás körülményei számottevően nem változnak, akkor a folyamatra jellemző vastagságú törmelékes zóna fejlődik ki. A szálkőzet és a törmelékes zóna alsó határa abban a mélységben lesz, ahol az oldószer telítődik, s e határ az oldás hatására dinamikus egyensúlyban folyamatosan süllyed lefelé. Ha az oldás körülményei megváltoznak, akkor az új helyzetnek megfelelően megváltozik a törmelékes zóna vastagsága és egy új dinamikus egyensúlyi állapot alakul ki. A törmelékes zóna, s vele együtt a karsztos felszín is olyan ütemben süllyed, ahogyan ezt a zónát alkotó törmelékdarabok oldódása lehetővé teszi.

A törmelékes oldódási zóna elvileg az autogén karsztok teljes területén megszakítatlanul kifejlődhet. Miután a karsztos térszíneken az oldást meghatározó tényezők helyileg jelentősen eltérhetnek egymástól, így a térszín különböző helyein a lepusztulás sebessége is eltérő lehet. Ez az eltérő ütemű süllyedés oldásos töbrök kialakulását eredményezi. A folyamat fokozatosan öngerjesztővé is válhat, hiszen a töbrökben több talaj és nedvesség halmozódik fel a környező térszínhez viszonyítva, így itt növekedhet a biogén széndioxid mennyisége, s ezáltal az oldószer agresszivitása. Ez a töbrök belsejében a környezetéhez képest még gyorsabb ütemű süllyedést eredményez.

3. Matematikai modell

A horizontális karsztosodás matematikai modelljének megszerkesztése során a fentiekben ismertetett geomorfológiai modell lényeges tulajdonságainak megtartása mellett néhány idealizáló feltevéssel élünk:

a) Feltételezzük, hogy a karsztosodó mészkő felső tartományában a repedések három olyan ekvidisztáns párhuzamos síkrendszert alkotnak, amely nyálábok páronként merőlegesek egymásra, s közülük az egyik síkrendszer horizontális elhelyezkedésű. E három síkrendszer a szálkőzet felső tartományát így egymással egybevágó a élhosszúságú kockák rendszerére bontja.

b) Feltesszük, hogy a kőzetbe szivárgó oldószer hatására e kockák sarkai előbb legömbölyödnek és a átmérőjű gömbökké formálódnak, majd gömb alakjukat megtartva oldódnak tovább. Valamennyi törmelékgömb középpontja teljes oldódási folyamata során az adott gömböt eredetileg tartalmazó a élhosszúságú kocka középpontjában marad. Ezen oldódó törmelékgömbök rendszere alkotja az ideális törmelékes oldódási zónát.

c) Feltételezzük továbbá, hogy az ideális törmelékes oldódási zónában elhelyezkedő törmelékgömbök átmérője lényegesen kisebb a zóna d vastagságánál. Az oldódási zónát alkotó gömbök sugara alulról, a gömbök zárt köbös térkitöltésétől indulva fölfelé haladva fokozatosan csökken és tart nullához, vagyis a gömbök teljes feloldódásához.

d) Feltételezzük azt is, hogy az ideális törmelékes oldódási zónán átszivárgó oldószer C kalciumkarbonát koncentrációja a zóna felső határától mért x mélység függvényében a

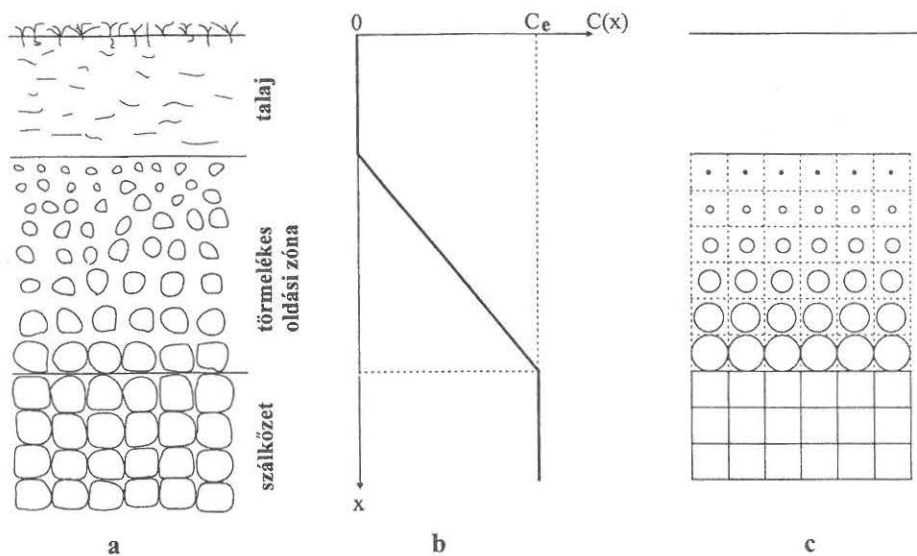
$$(1) \quad C(x) = \frac{C_e}{d} \cdot x \quad (0 \leq x \leq d)$$

összefüggéssel írható le, ahol C_e a feloldott kalciumkarbonát egyensúlyi koncentrációja (1. ábra)

Az általános karsztos oldási folyamat klasszikus matematikai leírását NERNST, W. (1904) adta meg a

$$(2) \quad \frac{dm}{dt} = \frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot S \cdot (C_e - C)$$

alakú differenciálegyenlet segítségével, ahol m = a mészkő oldásnak kitett felületéről eltávozott tömeg, t = a mészkő oldásának időtartama, k_K = a kémiai oldás sebességi állandója, k_T = a határretegben történő anyagtranszport sebességi állandója és S = az oldódó mészkő felülete.



1. ábra: A törmelékzónás karsztos térszín ideális oldódási modellje
 Jelmagyarázat: a. a karsztosodó térszín ideális keresztmetszéve, b. a $C=C(x)$ függvény c. a geometriai modell
 Fig. 1: Ideal dissolution its modell of the karst of the zone of debris
 Legend: a. the ideal cross-section of the karstification ground surface, b. the $c=C(x)$ function., c. the geometric modell

Az anyagtranszport sebessége DUBLJANSZKIJ, J. V. (1987) alapján előállítható a

$$(3) \quad k_T = \frac{85}{8} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \sqrt[3]{D^2 \cdot \nu}$$

alakban, ahol δ = az áramló rendszerre jellemző karakterisztikus méret, itt az egyes törmelékgömbök átmérője, D = a diffúziós állandó és ν = az áramló oldószer kinematikai viszkozitási tényezője.

Ha ρ jelöli a mészkő sűrűségét, dR pedig az S felszínű törmelékgömb sugarának dt idő alatti megváltozását, akkor

$$(4) \quad \frac{dm}{dt} = -\rho \cdot S \cdot \frac{dR}{dt},$$

amelynek felhasználásával a (2) egyenlet a

$$(5) \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{k_K \cdot k_T}{k_K + k_T} \cdot \frac{C_e - C}{\rho}$$

alakban írható fel. Alkalmazzuk most a (3) képletet és helyettesítsük be az (5) formulába, amely összevonások és rendezés után a

$$(6) \quad \frac{dt}{dR} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right) \cdot \frac{\rho}{C_e - C}$$

formát ölti. A (6) egyenlet képezi következő számításaink alapját, amelynek célja a karsztos térszín lepusztulási sebességének meghatározása.

4. A karsztos denudáció matematikai vizsgálata

Először a lefelé eltolódó ideális törmelékes oldódási zónát vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a zónában egymás alatt n számú rétegben helyezkednek el a törmelékgömbök. Az egyes gömböket körülvevő kockák élhossza a , így törmelékes zóna d vastagsága kifejezhető a

$$(7) \quad d = n \cdot a$$

összefüggéssel.

Bár a folyamatos oldás hatására a törmelékes oldási zóna egyenletes sebességgel süllyed lefelé, azonban az egyszerűbb matematikai kezelhetőség érdekében feltételezzük a zóna szakaszos süllyedését úgy, hogy ez átlagsebességet számolva megegyezzen a folyamatos süllyedés sebességével. Képzeljük tehát, hogy a törmelékes oldódási zóna Δt időtartamra megtartja térbeli helyzetét miközben folyik a karsztos oldás, majd hirtelen eltolódik lefelé az egyes törmelékdarabokat körülvevő kockák közös a élhosszával. Ezután ismét az adott térbeli helyzetben egy Δt ideig tartó oldási szakasz, majd ezt követően a nagyságú lefelé történő hirtelen eltolódás következik be. E digitalizált mozgás átlagos sebessége a fentiek szerint

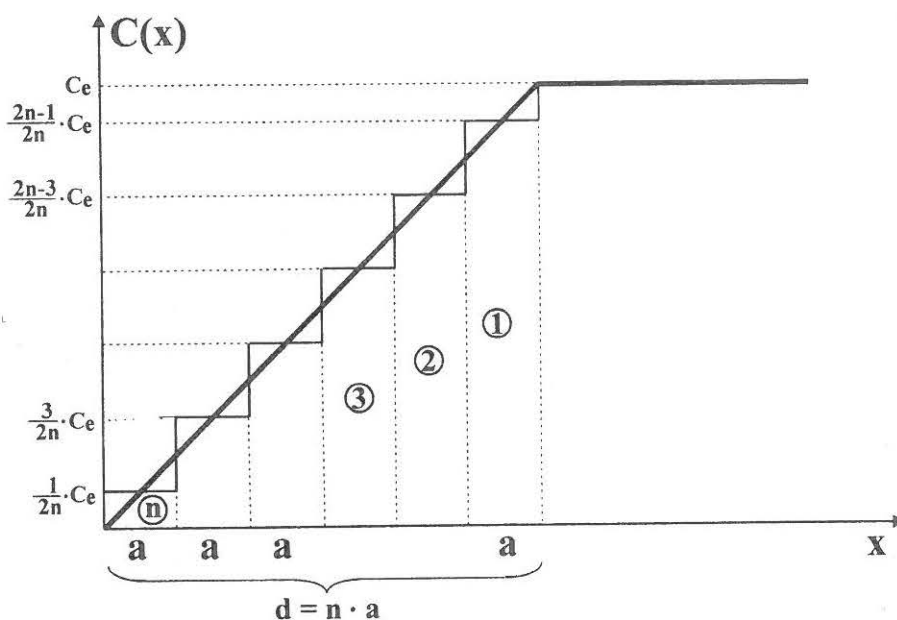
$$(8) \quad c_1 = \frac{a}{\Delta t} = \frac{n \cdot a}{n \cdot \Delta t} = \frac{d}{n \cdot \Delta t} ,$$

amely mozgás az oldási zóna folyamatos süllyedését könnyen és jól közelíti meg, ha a törmelékgömbök a átmérője lényegesen kisebb a zóna d vastagságánál. Így modellünk annál hívebben ragadja meg a tényleges folyamatot, minél finomabb szemcséjű a törmelékes oldódási zóna.

Az ideális törmelékes oldódási zóna felső széléhez rögzített, s vele együtt lefelé eltolódó koordináta-rendszerben az (1) összefüggéssel összhangban a $C(x)$ függvényt, tekintettel a fentiekben kifejtett szakaszos mozgásra, egy lépcsős függvény segítségével írhatjuk le a

$$(9) \quad C(x) = \frac{2k-1}{2n} \cdot C_e \quad ((k-1) \cdot a \leq x < k \cdot a, \quad 1 \leq k \leq n)$$

összefüggéssel (2. ábra).



2. ábra: A $C=C(x)$ függvény megközelítése lépcsős függvénnyel
Fig. 2: Approximation of the $C=C(x)$ by step function

Kövessük ezután egy törmelégömb teljes feloldódási folyamatát! Tegyük fel, hogy vizsgálatunk kezdetén éri el éppen a szakaszosan lefelé mozgó ideális oldódási zóna a kiválasztott gömböt, amely tehát az első Δt időtartamú oldási szakaszban a zóna legalsó rétegében helyezkedik el. Itt az oldószert C koncentrációja a (9) összefüggésből $k = n$ helyettesítéssel

$$(10) \quad C(x) = \frac{2n-1}{2n} C_e$$

nagyságúnak adódik. Ekkor a (6) egyenlet alakja

$$(11) \quad \frac{dt}{dR} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\rho}{C_e - \frac{2n-1}{2n} C_e},$$

amelynek rendezésével a

$$(12) \quad dt = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \cdot \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) \cdot \frac{\rho}{\frac{1}{2n} \cdot C_e} dR$$

összefüggés adódik. A (12) összefüggés Δt tartamú oldási szakaszra történő integrálásával a

$$(13) \quad \int_0^{\Delta t} dt = - \frac{\rho}{\frac{1}{2n} \cdot C_e} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right) dR$$

formula, illetve a

$$(14) \quad [t]_0^{\Delta t} = - \frac{\rho}{\frac{1}{2n} \cdot C_e} \left[\frac{R}{k_K} + \frac{8}{85} \frac{R^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right]_{R_n}^{R_{n-1}}$$

összefüggés nyerhető, amely rendezés és összevonások után a

$$(15) \quad \frac{1}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{R_n - R_{n-1}}{k_K} + \frac{8}{85} \frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}}$$

alakra hozható.

Ezen oldási szakasz után az ideális törmelékes oldódási zóna ugrás-szerűen áthelyeződik α értékkel mélyebbre, ezáltal vizsgált törmelékgömbünk

a zóna alulról számított második rétegébe kerül, noha térbeli helyzete nem változott. E helyen a zóna felső széléhez viszonyított kisebb mélységben lévén némileg agresszívebb oldószerrel találkozik a vizsgált törmelékgömb. Itt az oldószer C koncentrációja ismét a (9) összefüggésből a $k = n-1$ helyettesítéssel nyerhető:

$$(16) \quad C(x) = \frac{2n-3}{2n} C_e .$$

Most a (6) egyenlet alakja

$$(17) \quad \frac{dt}{dR} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right) \frac{\rho}{C_e - \frac{2n-3}{2n} C_e} ,$$

amelyből az első lépésnél látott módszerrel nyerhetjük a (15) formulának megfelelő

$$(18) \quad \frac{3}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{k_K} + \frac{8}{85} \cdot \frac{R_{n-1}^2 - R_{n-2}^2}{\sqrt[3]{D^2 v}}$$

összefüggést a második oldási szakasz végére.

Megkezdett eljárásunkat tovább folytatva a kiválasztott törmelékgömbön szakaszosan halad keresztül az ideális törmelékes oldódási zóna. Az n -edik utolsó lépésben a törmelékgömb a zóna felső rétegébe kerül, s az utolsó oldási szakasz végére teljesen feloldódik. Ezen utolsó szakaszban éri a legagresszívebb oldószer, amelynek C koncentrációja a (9) felhasználásával a $k=1$ helyettesítéssel kapható meg:

$$(19) \quad C(x) = \frac{1}{2n} C_e .$$

A (6) egyenlet alakja

$$(20) \quad \frac{dt}{dR} = - \left(\frac{1}{k_K} + \frac{16}{85} \frac{R}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right) \frac{\rho}{C_e - \frac{1}{2n} C_e} ,$$

amelyből az első lépésnél részletezett módon a (15) formulának megfelelő analóg

$$(21) \quad \frac{2n-1}{2n} \frac{C_e}{\rho} \Delta t = \frac{R_1 - R_0}{k_K} + \frac{8}{85} \frac{R_1^2 - R_0^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}}$$

összefüggés származtatható.

Ezzel leírtuk az n számú rétegből álló ideális törmelékes oldódási zónának a kiválasztott törmelékgömbön való áthaladását, amelynek eredményeként az a átmérőjű gömb n lépésben teljesen feloldódik.

Összegezzük ezután a (15), (18), illetve (21) összesen n számú formuláját, amely rendezés és a megfelelő egynemű mennyiségek összevonása után az alábbi alakot ölti:

$$(22) \quad \frac{1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1)}{2n} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{(R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \dots + (R_1 - R_0)}{k_K} + \frac{8}{85} \frac{(R_n^2 - R_{n-1}^2) + (R_{n-1}^2 - R_{n-2}^2) + \dots + (R_1^2 - R_0^2)}{\sqrt[3]{D^2 \nu}}$$

E formula bal oldalán szerepel az első n darab páratlan szám összege, amelynek értéke n^2 . A jobb oldal mindkét tagja egy-egy teleszkópikus összeg, továbbá $R_n = \frac{a}{2}$ és $R_0 = 0$ lévén a (22) az alábbi tömörebb alakra írható át:

$$(23) \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{C_e}{\rho} \cdot \Delta t = \frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}}$$

A (23) összefüggés egyszerű átrendezésével meghatározhatjuk az ideális törmelékes oldási zóna oldási szakaszainak Δt nagyságát:

$$(24) \quad \Delta t = \frac{2\rho}{n \cdot C_e} \left(\frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 \nu}} \right),$$

kiszámíthatjuk továbbá az oldódási zóna lefelé történő eltolódásának átlagos sebességét is (8) alapján:

$$(25) \quad c_1 = \frac{a}{\Delta t} = \frac{d}{n \cdot \Delta t} = \frac{C_e \cdot d}{2\rho} \cdot \left(\frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 V}} \right)^{-1}$$

Az eddigiek ismeretében már meghatározhatjuk a vizsgált karsztos térszín modellünk alapján származtatható denudációs sebességét. Szemeljük ki az oldási zóna egy tetszőleges, n számú gömböt tartalmazó oszlopát, amely gömbök mérete alulról felfelé haladva egyre kisebb. Könnyen beláthatjuk, hogy e sugarak nagysága rendre megegyezik egy adott törmelékgömb teljes feloldódási folyamata egyes fázisaiban mérhető, s a fentiekben látott sugarai-val, miközben e gömbön áthalad az ideális oldási zóna. E sugarak értéke az oszlopban lentől felfelé haladva egy Δt időtartamú oldási szakasz kezdetén

$R_n = \frac{a}{2}, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_2, R_1$, az oldási szakasz végén pedig rendre $R_{n-1}, R_{n-2}, R_{n-3}, \dots, R_1, R_0 = 0$. E gömbök térfogatai pedig az oldási szakasz kezdetén $V_n = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3, V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_2, V_1$, az oldási szakasz végén rendre $V_{n-1}, V_{n-2}, V_{n-3}, \dots, V_1, V_0 = 0$. Így a Δt idő alatt e gömboszlopból kioldott eltűnő térfogat nagysága:

$$(26) \quad \begin{aligned} \Delta V &= (V_n - V_{n-1}) + (V_{n-1} - V_{n-2}) + (V_{n-2} - V_{n-3}) + \dots + \\ &+ (V_2 - V_1) + (V_1 - V_0) = V_n + (-V_{n-1} + V_{n-1}) + \\ &+ (-V_{n-2} + V_{n-2}) + \dots + (-V_1 + V_1) + (-V_0) = \\ &= V_n - V_0 = V_n = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot a^3. \end{aligned}$$

Másrészt ha Δx a karsztos térszín süllyedése e Δt idő alatt, akkor fennáll

$$(27) \quad \Delta V = a^2 \cdot \Delta x$$

összefüggés is, amelyet a (26) összefüggéssel összevetve

$$(28) \quad \frac{\pi}{6} \cdot a^3 = a^2 \cdot \Delta x \quad ,$$

vagyis

$$(29) \quad \Delta x = \frac{\pi}{6} \cdot a$$

adódik. Most a karsztos térszín denudációs sebessége már egyszerűen meghatározható (24) és (29) alapján:

$$(30) \quad c_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot a}{\frac{2\rho}{n \cdot C_e} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{85} \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right)} =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{C_e \cdot d}{2\rho} \left(\frac{a}{2k_K} + \frac{2}{85} \cdot \frac{a^2}{\sqrt[3]{D^2 v}} \right)^{-1} = \frac{\pi}{6} \cdot c_1$$

A karsztos térszín tényleges c denudációs sebességére fennáll a

$$(31) \quad c_2 \leq c \leq c_1$$

becslés, hiszen e sebesség nem haladhatja meg a törmelékes zóna lefelé való eltolódásának ütemét, viszont legalább a kioldott anyag mennyiségének megfelelően süllyednie kell a térszínnek. Megjegyezzük, hogy a c denudációs sebesség lehet esetleg c_2 értékénél is kisebb, ha az oldás következtében folyamatosan nem tömörödik a kioldott anyag helyére felülről talaj, illetve törmelék. Az így keletkező hézagok a felszínen úgy jelentkeznek, mintha a denudáció sebessége a valóságosnál kisebb lenne.

Az elméleti rész lezárásaként egy lényeges dologra szükséges még utalnunk. A fentiekben ismertetett matematikai lepusztulási modellünk gyakorlatban történő alkalmazhatósága érdekében célszerű a (25), illetve a (30) összefüggést kiegészíteni egy-egy olyan korrekciós tényezővel, amely az elméletileg meghatározható és a természetben előálló számszerű eredmények között fennálló lehetséges eltérések kifejezésére és megszüntetésére is alkalmas. E tényezők meghatározására azonban csak terepi mérések elvégzésével, valamint laboratóriumi modell kísérletek végrehajtásával van lehetőségünk.

Modellünk ilyen valósághoz történő illesztése az elkövetkezendő évek feladata lesz.

A fentiekben bemutatott matematikai modellünket egy egyszerű számpéldával illusztráljuk. Legyen az ideális törmelékes zóna vastagsága $d = 1,5$ m, az egyes törmelégömbök átmérője a zóna alján $a = 0,02$ m, a zóna hőmérséklete $T = 283^\circ\text{K} = 10^\circ\text{C}$, végül az éves átlagos csapadékhullási idő $\eta = 500 \frac{\text{h}}{\text{év}}$. Ekkor a részletek mellőzésével (25), illetve (30) felhasználásával

$$(32) \quad c_1 = 0,05 \frac{\text{mm}}{\text{év}} \quad \text{és} \quad c_2 = 0,026 \frac{\text{mm}}{\text{év}},$$

ami azt jelenti, hogy mintegy 20-38 év szükséges ahhoz, hogy a karsztos térszín 1 mm értékkel süllyedjen.

5. Összegzés

A dolgozatban bemutatunk egy olyan matematikai modellt, amelynek segítségével számszerűen meghatározhatjuk egy-egy adott karsztos térszínen a denudáció sebességét. E számítás elvégzéséhez csupán néhány könnyen meghatározható paraméter ismerete szükséges. Így ismernünk kell a törmelékes oldási zóna d vastagságát, az egyes törmelések átlagos nagyságát, amely a tartó szálkőzet a repedezettségi mértékével adható meg. Szükséges még az adott körülmények között az oldószer C_e telítési koncentrációját, a mészkő ρ sűrűségét, továbbá az áramló oldószer D diffúziós állandóját és v kinematikai viszkozitását meghatározni. E paraméterek értékének alkalmas megválasztásával eredményesen írhatjuk le a mészkő horizontális karsztosodását matematikai módszerekkel.

IRODALOM

- BÖGLI, A. (1963): Adatok a karsztbarlangok keletkezéséhez – Karszt és Barlang II. p. 83-86.
- DUBLJANSZKIJ, J.V. (1987): Teoreticeszkoje modelirovanije dinamiki formirovanija gidrotermokarsztovüh polosztyej – Metodi i izucsenyija geologicseszkih javlenij, Novoszibirszk p. 97-111.
- JAKUCS L. (1971): A karsztok morfofenetikája – Akadémiai Kiadó, Budapest

- NERNST, W.* (1904): Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen II. – Zeitschrift für Physikalische Chemie. 47. p. 52-55.
- PÉNTEK K.* (1998): Néhány karsztos folyamat matematikai leírása Ph.D. disszertáció. JATE, TTK
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1990): Kísérlet a karsztos felszínnek denudációjának kvantitatív leírására – Karszt és Barlang I. p. 19-27.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1994): Néhány karsztos folyamat leírása a fizikai-kémiai hidrodinamika alapján – BDTF Tudományos Közleményei IX. Természettudományok IV. Szombathely, p. 19-42.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1995): Kísérlet a felszíni vertikális karsztosodás kvantitatív leírására – Földrajzi Értesítő XLIV. 3-4. p. 157-177.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1996): Theoretical model of surface karstic processes – Zeitschrift für Geomorphologie 40. 4. p. 461-476.
- VERESS M. – PÉNTEK K.* (1998): Modelling of karst surface evolution: Quantitative description of surface vertical karstification – *Á. KERTÉSZ – L. BASSA* (eds.) in Windows on Hungarian Geography. Studies in Geography in Hungary 28. Geographical Research Inst. HAS, Budapest, p. 53-69.

