

SZIKLAKARROK KARSZTOSODÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

SZUNYOGH GÁBOR

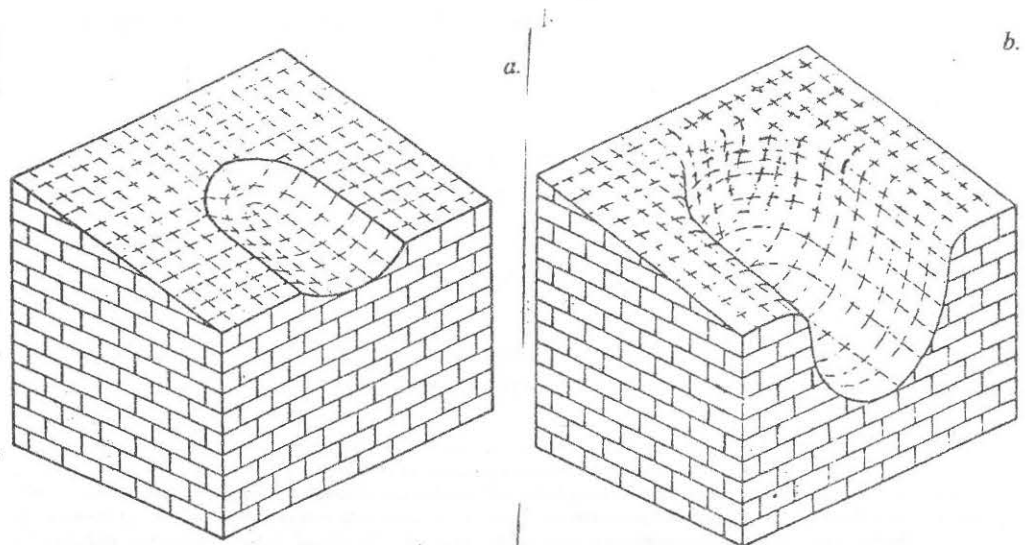
Berzsényi Dániel Tanárképző Főiskola, Természetföldrajz Tanszék, Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.

Abstract: The theoretical-physical examination of karren processes on limestone surfaces is shown in this study. Based on our former examinations the simultaneous equations of inclined, not aven-like limestone erosion are given. The hydrodynamical, chemical and morphological regularities of karstification processes on rock surfaces are also considering. The differential geometrical relations, necessary to mathematical writing of rock surfaces change their form in time, are determined and quantitative relations of physical-chemical processes influenced the temporal change of these parameters are given. The main magnitude was the three variable function, which can give the form $z(x,y,t)$ of karst surfaces. The determination of this form also postulates the calculation of the speed of flowing water on limestone surface, the concentration of solution CaCO_3 in water and the thickness of liquid film. The algorithm of computer solving of deduced partial differential simultaneous equations is given.

Előzmények

A Berzsényi Dániel Tanárképző Főiskola Természetföldrajz Tanszékének Karsztkutató csoportja 1994-ben publikálta a szabad, talajjal nem borított mészkőfelszín karsztosodásának általános egyenletrendszerét (SZUNYOGH, 1994). Ezen egyenletrendszer "végső célja" az, hogy (megfelelő fizikai, kémiai és geológiai törvények, ill. szükséges kezdeti- és peremfeltételek ismeretében) elméletileg levezethetővé tegye valamely mészkőfelület kezdeti alakjának ismeretében a sziklafelszín későbbi formájának matematikai megadását, szolgálva ezzel a klasszikus karsztmorfológia tételeinek (JAKUCS, 1971) fizikai-kémiai alátámasztását (1. ábra). E matematikai modellezés természetesen nem helyettesíti, hanem csak kiegészíti a klasszikus karsztmorfológiai vizsgálatokat azáltal, hogy lehetővé teszi hipotézisek (elfogadott fizikai-kémiai törvényeken alapuló) ellenőrzését; kísérletileg nem vizsgálható, igen lassú folyamatok, pl. valamely sziklafelszín jelenlegi állapotának több évszázad vagy évezred múltán mutatkozó módosulásainak előrejelzését; jelenleg nem tanulmányozható fizikai (hidrológiai, klimatológiai, stb.) körülmények között folyó karsztosodás eredményeinek megítélését; globális környezetváltozások karsztosodásra kifejtett hatásának prognosztizálását és kvantitatív vizsgálatát, stb.

Mindennek érdekében felállítottunk egy többismeretlenes parciális differenciálegyenlet-rendszert, melynek megoldása egy olyan $F(\mathbf{r})$ függvény,



1. ábra. a.: A vizsgált, talajjal nem elborított mészkőfelszín t_0 időpillanathoz tartozó kezdeti alakja; b.: ugyanezen sziklafelszínnek a karsztkorrózió hatására megváltozott alakja egy későbbi, t időpillanatban
 Figure 1. a.: The examined original form of limestone surface, which is not covered with soil, belonging to t_0 time; b.: the changed form of the same rock surface later in t time, for the influence of karst corrosion

mely megadja, hogy a tér valamely, r helyvektorú pontján mely t időpillanatban fog "áthaladni" az oldódás miatt helyzetét állandóan változtató (vándorló) kőzetfelszín. Keresett tehát a mészkőfelszín

$$t = F(\mathbf{r}) \quad (1)$$

alakban. Levezethető (SZUNYOGH, 1995.a), hogy a mészkőfelszín elmozdulásának (lepusztulásának) w sebességvektora [m/s]

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n}}{|\text{grad } F|}, \quad (2)$$

ahol \mathbf{n} a kőzet felületére merőleges egységvektor (azaz a mészkőfelszín u.n. normálisa).

A lepusztulás mértékéből kiszámítható, hogy milyen tömegű mészkő távozott a sziklafelszín egységnyi területéről időegység alatt, azaz kifejezhető az oldatba jutó mészkő u.n. q_k tömegáram-sűrűsége [$\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$]:

$$q_k = -\rho_k \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad (3)$$

ahol ρ_k a mészkő sűrűsége [kg/m^3].

A tömegmegmaradás tételéből kiindulva bebizonyítható, hogy a kőzet felületéről eltávozó mészkő tömegáram-sűrűsége és a vízben oldott kalcium-karbonát koncentrációja között

$$v \cdot \text{grad } c = \frac{q_k}{h} + \frac{c}{\rho_v h} q_v n \quad (4)$$

kapcsolat áll fenn, ahol v a mészkő felszínén szivárgó víz sebessége [m/s], h a folyadékréteg vastagsága [m], q_v pedig az oldószer-utánpótlást jelentő csapadékhozam (azaz a kőzetfelszín egységnyi területére időegység alatt hulló csapadék tömege [$\text{kg/m}^2 \text{s}$]).

A szivárgó víz v sebességét alapvetően (a g nehézségi gyorsuláson keresztül) a gravitációs- és (a víz η viszkozitási tényezőjén át) a súrlódási erő határozza meg, mely a Navier-Stokes egyenletből (FRANK—MIESES, 1967) levezethetően

$$v = \frac{\rho_v h^2}{3\eta} [g - (g \cdot n)n]. \quad (5)$$

A tömegmegmaradás tétele a vízre külön is érvényes, mely a kontinuitási egyenletből levezethetően

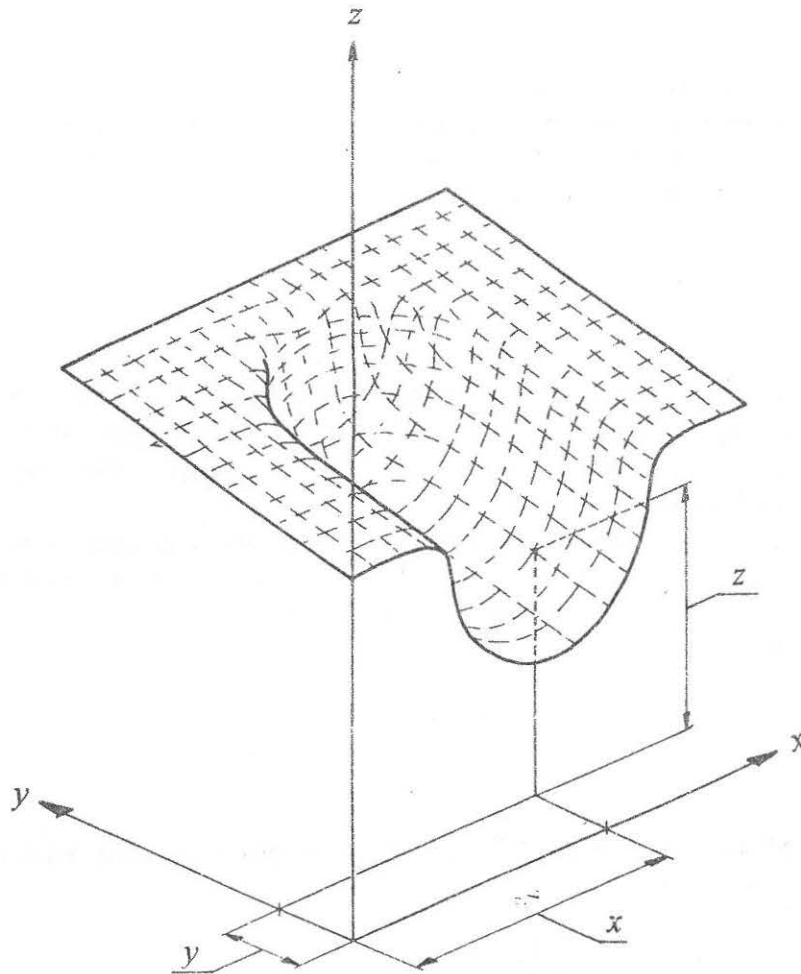
$$\oint_{(A)} (\rho_v v - q_v) dA = 0 \quad (6)$$

alakot ölt, ahol A egy, a vízfilmben kijelölt, nyugvó térfogatot határoló zárt felület, ρ_v pedig a víz sűrűsége (kg/m^3).

Az oldódás utolsó egyenlete a karsztosodás kémiai törvényszerűségeit tükrözi, kifejezve, hogy időegység alatt annál több mészkő kerül oldatba, minél agresszívebb a víz, azaz minél nagyobb a különbség a maximálisan feloldható és a ténylegesen oldatban lévő kalcium-karbonát között:

$$q_k = k(c_e - c). \quad (7)$$

ahol k az oldódás reakciósebességének állandója [m/s] (DREYBROT, W. 1988).

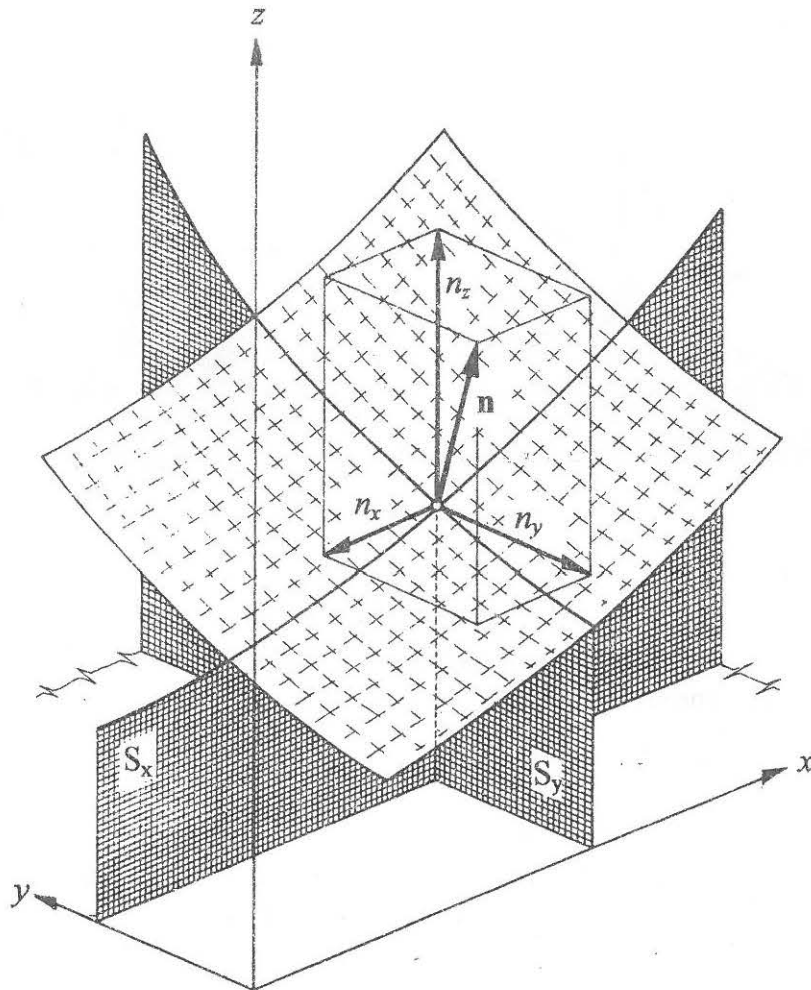


2. ábra. A sziklafejszín pillanatnyi helyzetének megadására szolgáló koordináta-rendszer elhelyezkedése
Figure 2. System of co-ordinates for giving the temporary place of rock surface

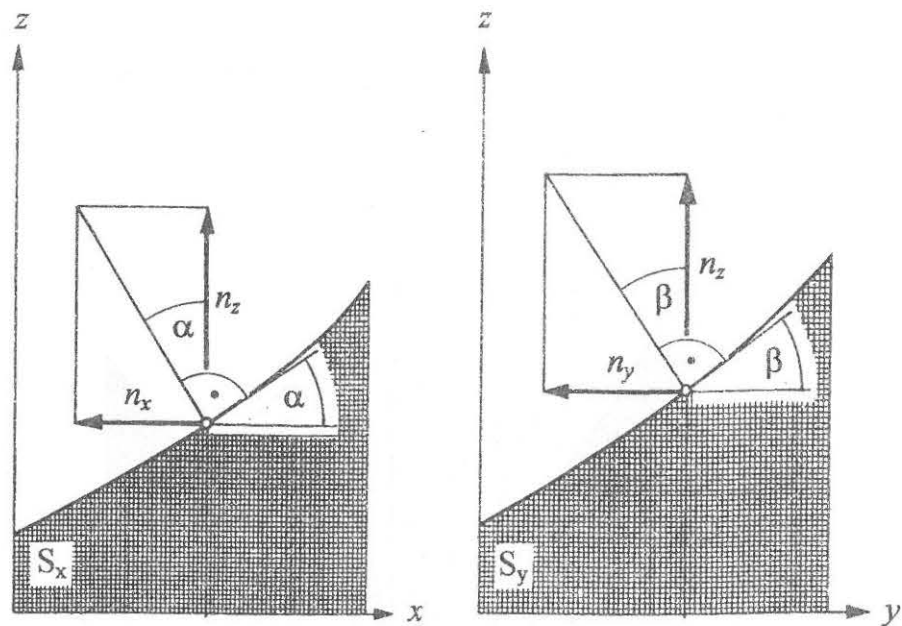
A (2)—(7) egyenletrendszer általános abban az értelemben, hogy érvényességi köre független az alkalmazott koordináta-rendszer megválasztásától, azaz rugalmasan igazítható a modellezendő karsztos folyamat geometriájához legszerencsésebben illeszkedő koordináta-rendszerhez. Ez az általánosság azonban bizonyos hátrányokkal is jár: a közölt egyenletek (eredeti formájukban) közvetlenül nem alkalmasak egy-egy konkrét feladat megoldására, hanem előzőleg konkretizálni kell az adott feladathoz illeszkedő koordináta-rendszerre.

Jelen tanulmányban ezt a konkretizálást Descartes-féle koordináta-rendszer esetére végezzük el, mert ez illeszkedik legszerencsésebben a magas-

hegységi sziklafelszíneken lezajló karsztos folyamatok matematikai vizsgálatahoz.



3. ábra. A kőzet felületére merőleges un. normálvektor elhelyezkedése és felbontása komponensekre
Figure 3. The place of normal vector, which is perpendicular to rock surface and its analysis for components



4. ábra. A kőzetfelszín normálvektorának n_x , n_y és n_z komponensei a 3. ábrán feltüntetett S_x és S_y síkmet-szetekben ábrázolva
 Figure 4. The n_x , n_y and n_z components of normal vector on rock surface represented in S_x and S_y plane sections on Figure 3

A szabad mészkőfelszín leoldódásának egyenletrendszere Descartes-féle koordinátarendszer alkalmazása esetében

A mészkőfelület térbeli megadására alkalmazzunk olyan derékszögű koordinátarendszert, melynek x és y tengelye vízszintes helyzetű, z -tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat (2. ábra).

A (2)—(7) egyenletekben szereplő valamennyi ismeretlen az x és y térkoordináták, valamint a t idő függvényei. Célunk ezen függvények meghatározása, ill. végeredményül a kőzetfelület matematikai megadását kifejező

$$z = f(x, y, t) \quad (8)$$

összefüggés megkeresése.

A kőzetfelület normálvektora Descartes-féle koordináta-rendszerben

Minthogy a fenti egyenletrendszerben többször is előfordul a kőzetfelület normálisa, ezért mindennek előtt n -et kell kifejezni a felületet megadó $z(x, y, t)$ függvény deriváltjaiként (3. ábra). Jelölje a felület x -irányba vett dőlésszögét α , y -irányba értelmezett dőlését pedig β . A felület normálvektorának n_x , n_y és n_z komponenseire felírható (4. ábra), hogy

$$n_x = -n_z \operatorname{tg} \alpha, \quad (9)$$

$$n_y = -n_z \operatorname{tg} \beta, \quad (10)$$

és

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (11)$$

A $\operatorname{tg} \alpha$ és $\operatorname{tg} \beta$ mennyiségek geometriailag a kőzetfelület x és y irányba vett meredekségeivel egyeznek meg, azaz kifejezhetők a kőzetfelületet megadó függvény parciális deriváltjaival:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (13)$$

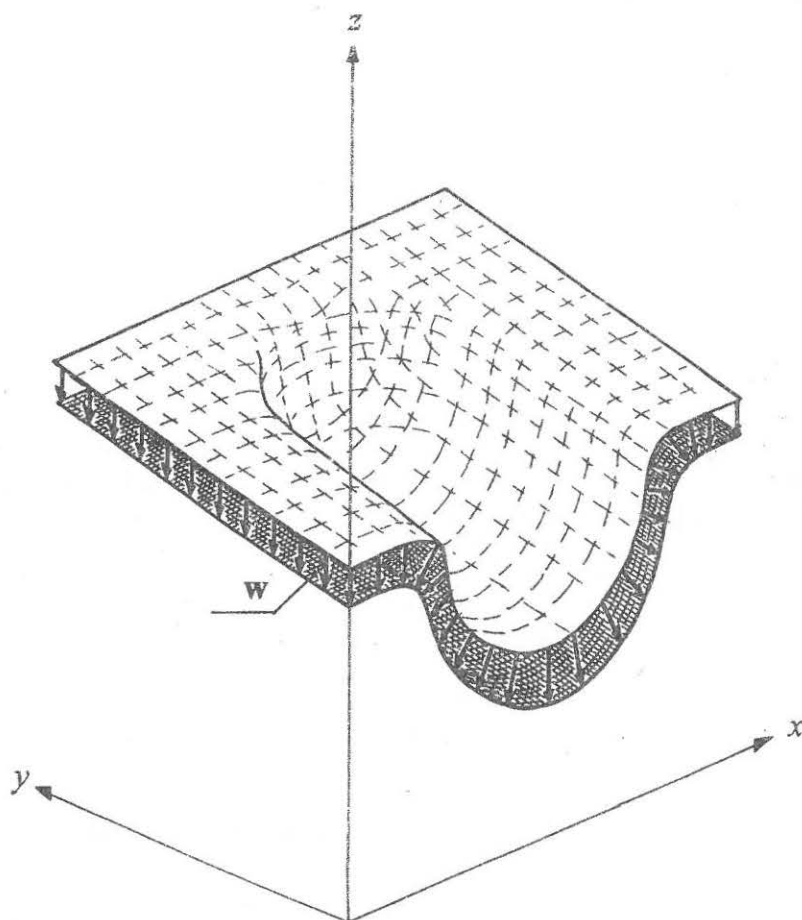
A (9)—(13) egyenletek n_x , n_y és n_z -re nézett megoldásai:

$$n_x = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (14)$$

$$n_y = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (15)$$

és

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \quad (16)$$



5. ábra. A lepusztulás sebességvektorának értelmezése
 Figure 5. The interpretation of speed vector of denudation

A (14)—(16) lehetővé teszi a kőzetfelületre merőleges egységvektor Descartes-féle koordináta-komponenseinek kiszámítását a felület egyenletének ismeretében.

A kőzetfelület lepusztulásának sebessége

A karsztkorrózió miatt a kőzet felszíne w sebességgel lassan, de folyamatosan mozog, süllyed. w abszolút értékét az időegység alatt lepusztuló kőzetréteg vastagságaként értelmezzük. Iránya pedig merőleges a kőzet felületére, és a még ép mészkő belseje felé mutat (5. ábra).

w képletében szereplő gradienses kifejezést koordinátáson kiírva

$$\frac{1}{|\text{grad } F|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2}} \quad (17)$$

összefüggést kapjuk, mely az inverz-függvényekre érvényes deriválási szabályok figyelembe vételével

$$\frac{1}{|\text{grad } F|} = \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (18)$$

alakba hozható.

A (2)-szerint w meghatározásához a (18)-at még meg kell szorozni a felület normálisával, mely végül a (14)–(16) figyelembe vételével

$$w_x = \frac{-\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (19)$$

$$w_y = \frac{-\frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (20)$$

és

$$w_z = \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad (21)$$

egyenleteket szolgáltatja. A sebesség abszolút értéke

$$|w| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \quad (22)$$

mely a kijelölt műveletek elvégzése után

$$|w| = \frac{\left| \frac{\partial z}{\partial t} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}} \quad (23)$$

alakot ölti.

A leoldódó kőzet tömegáram-sűrűsége

A mészkő felületéről távozó anyag tömegáram-sűrűségére megadott (3) összefüggés a (14)—(15) és (20)—(22) kifejezések figyelembe vételével (a (3)-ban kijelölt skaláris szorzások és egyenletrendezések után)

$$q_k = -\rho_k \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1}} \quad (24)$$

formát nyeri.

A (24) egyenletből nyilvánvalóan adódik, hogy ha a kőzet pusztul (azaz $q_k \geq 0$), akkor $\frac{\partial z}{\partial t} \leq 0$, tehát a felszín egyre alacsonyabbá válik, süllyed.

A kalcium-karbonát oldódásának kémiai egyenlete

Az oldódás kémiai egyenlete kifejezi, hogy időegység alatt annál több mészkő jut oldatba (azaz annál nagyobb a feloldódó kalcium-karbonát tömegáram-sűrűsége), minél agresszívebb a víz, azaz minél nagyobb a tényleges és a maximálisan oldatba vihető kalcium-karbonát mennyisége közötti különbség. Ezt a kapcsolatot matematikailag a (7) testesíti meg (VERESS—PÉNTEK 1990, 1992). Bal oldalába beírva a (24) által megadott tömegáram-sűrűséget, kapcsolatot nyerünk a kőzetfelület alakját megadó függvény deriváltjai és az oldatban található kalcium-karbonát koncentrációja között:

$$-\rho_k \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = k(c_e - c). \quad (25)$$

Kifejezve ebből $\frac{\partial z}{\partial t}$ -t, egyenletet kapunk a kőzetfelület süllyedésének sebességére:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -k \frac{c_e - c}{\rho_k} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}. \quad (26)$$

A (26)-ból kiolvasható, hogy mennél agresszívebb a víz (azaz mennél nagyobb a különbség a víz egyensúlyi (c_e) és tényleges (c) kalcium-karbonát koncentrációja között, tehát mennél nagyobb a ($c_e - c$)), annál gyorsabban pusztul a kőzet. Látható továbbá, hogy a terület lejtése (melyet a (12) és (13) nyomán a $\frac{\partial z}{\partial x}$ ill. a $\frac{\partial z}{\partial y}$ mennyiségek fejeznek ki) szintén növelő szerepet játszik a felszín süllyedésének sebességében.

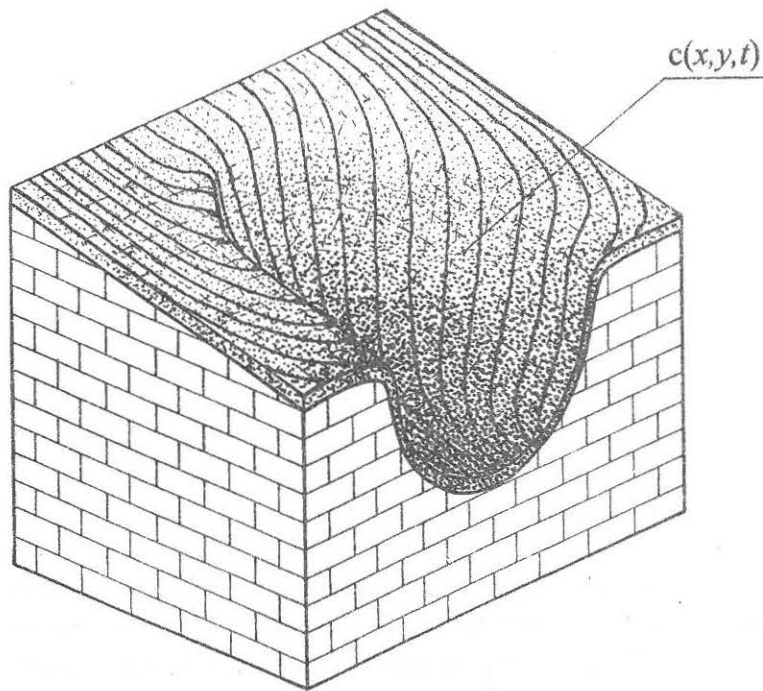
Vizsgáljuk meg a (26) alapján $\frac{\partial z}{\partial t}$ előjelét, amit tényezőinek analízise nyomán ítélnünk meg! A (26) jobb oldalának első tényezőjeként álló k egy kémiai állandó, mely pozitív szám. Hasonlóképp pozitív a kőzet sűrűsége is (ρ_k), mely nevezőben foglal helyet.

A (26) második, a számlálóban álló tényezője negatív nem lehet, mert az túltelített oldatot reprezentálna, ami pedig korrózió esetén lehetetlen, azaz

$$c_e - c \geq 0. \quad (27)$$

A (26) utolsó tényezője pedig négyzetösszegekből vont pozitív gyök, tehát

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \geq 0. \quad (28)$$



6. ábra. A sziklafelszínen szivárgó vízfilmben oldva tartott kalcium-karbonát térbeli eloszlása
 Figure 6. The spatial dispersion of CaCO_3 in the liquid film sweated on rock surface

A fentiekből kiderül, hogy a (26) jobb oldalán álló valamennyi mennyiség pozitív, így szorzatuk is pozitív. Mivel azonban a (26)-ot egy (-) előjel is kiegészíti, megállapítható, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial t} \leq 0, \quad (29)$$

tehát karsztkorrózió hatására a kőzet felszíne nem kerülhet magasabbra, mint korábban volt, hanem csak süllyedhet. (Az idő múlásával z , azaz a mészkő felszínének tengerszint feletti magassága egyre kisebb és kisebb.) E látszólag nyilvánvaló, a karsztológiából ismert tétel matematikai "visszatükrözése" azonban a levezetett összefüggések jóságát igazolja.

A kőzet felszínén szivárgó víz oldott kalciumkarbonát-tartalmának térbeli alakulása

Miközben a víz a kőzet felszínén áramlik, folyamatosan vesz fel kalcium-karbonátot. Az oldás sebessége a kőzetfelület különböző pontjaiban azonban egymástól eltérő, hiszen az számos tényezőtől, mindenek előtt a

vízben már korábban feloldott kalcium-karbonát mennyiségétől (c) és a vízfilm áramlásának sebességétől (v) függ (6. ábra). Mindezt a (4) egyenlet veszi figyelembe, mely Descartes-féle koordináta-rendszerben felírva:

$$\frac{\partial c}{\partial x} v_x + \frac{\partial c}{\partial y} v_y = \frac{q_k}{h} + \frac{c}{\rho_v h} \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n}, \quad (30)$$

ahol v_x és v_y a víz sebességvektorának x - és y -irányú komponensei, h a kőzet felszínén szivárgó vízfilm vastagsága, \mathbf{q}_v pedig a csapadékhozam. A (30) így kapcsolatot teremt a víz sebessége, kémiai összetétele, a korrodált kőzet tömege és a területre hulló csapadék hozama között.

\mathbf{q}_v vektor-komponensei Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$\mathbf{q}_v = \begin{cases} 0, \\ 0, \\ -q_v. \end{cases} \quad (31)$$

ahol q_v egy pozitív szám. Mértékegysége: $\text{kg/m}^2\text{s}$.

A (30) jobb oldalának első tagjába helyettesítsük q_k (7)-ben megadott alakját, a második tagjában pedig \mathbf{q}_v (31)-ben megadott kifejezését. A kőzet-felület \mathbf{n} normálisának (14)—(16) egyenleteit figyelembe véve végezzük el a kijelölt skaláris szorzást! Végül

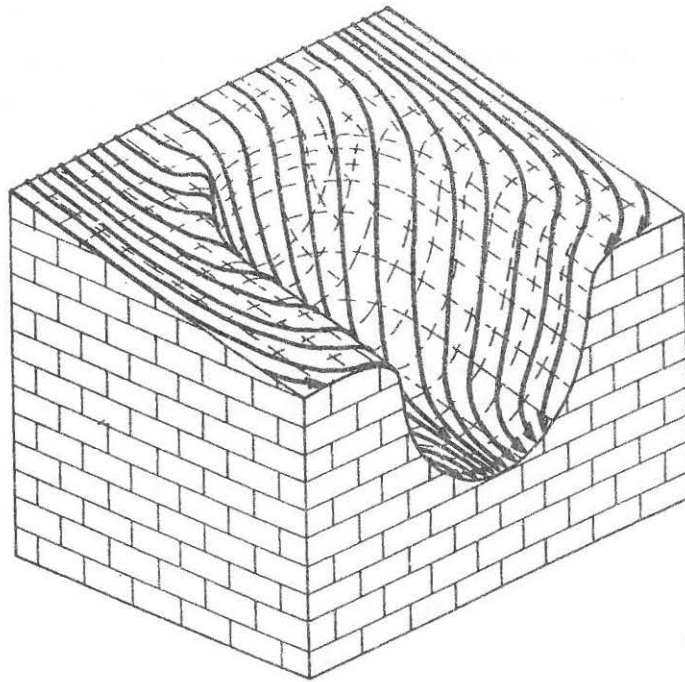
$$\frac{\partial c}{\partial x} v_x + \frac{\partial c}{\partial y} v_y = k \frac{c_e - c}{h} - \frac{c}{\rho_v h} q_v \quad (32)$$

egyenletet nyerjük a feloldott kalcium-karbonát koncentrációjának térbeli eloszlását megadó egyenletre.

A (32) számot ad arról, hogy a kőzet felszínén szivárgó oldat kalcium-karbonát koncentrációjára a víz agresszivitása ($c_e - c$) növelő hatással van, hiszen az agresszív víz oldja a mészkövet, míg a csapadékból származó vizutánpótlódás csökkenti a koncentrációt (hígítja az oldatot), u.i. a (32) jobb oldalán q_v negatív előjellel szerepel.

A kőzetfelszínen áramló víz sebessége

A víz áramlását a nehézségi erő váltja ki, a folyadéksúrlódás pedig fékezi. Az áramlási viszonyok tisztázásánál elvileg a tehetetlenségi erőket is



7. ábra. A sziklafelszínre elborító vízfilm áramvonalai
 Figure 7. Streamlines of liquid film covered the rock surface

figyelembe kellene venni, de viszonylag vékony rétegben áramló vízfilmbe az áramlás olyan lassú, hogy az utóbbiak az előbbi kettő mellett elhanyagolhatók (7. ábra). Természetesen nagysebességű áramlásnál a Navier-Stokes egyenlet bal oldalán már a tehetetlenségi erőket is figyelembe vevő teljes alakjával kell dolgozni (SZUNYOGH 1995.b).

A sebességre megadott (5)-ös számú összefüggésben előfordul a nehézségi gyorsulás \mathbf{g} vektora. Mivel \mathbf{g} nyilvánvalóan függőleges és lefelé mutat, ezért csak z-irányú vektorkomponenssel rendelkezik, azaz

$$\mathbf{g} = \begin{cases} 0, \\ 0, \\ -g, \end{cases} \quad (33)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás abszolút értéke (10 m/s^2). Elvégezve az (5) jobb oldalán szereplő $\mathbf{g}\mathbf{n}$ skaláris szorzást, a szükséges rendezések után a víz sebességének vektor-komponenseire

$$v_x = -\frac{\rho_V g h^2}{3\eta} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (34)$$

$$v_y = -\frac{\rho_V g h^2}{3\eta} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (35)$$

$$v_z = -\frac{\rho_V g h^2}{3\eta} \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad (36)$$

egyenleteket nyerjük.

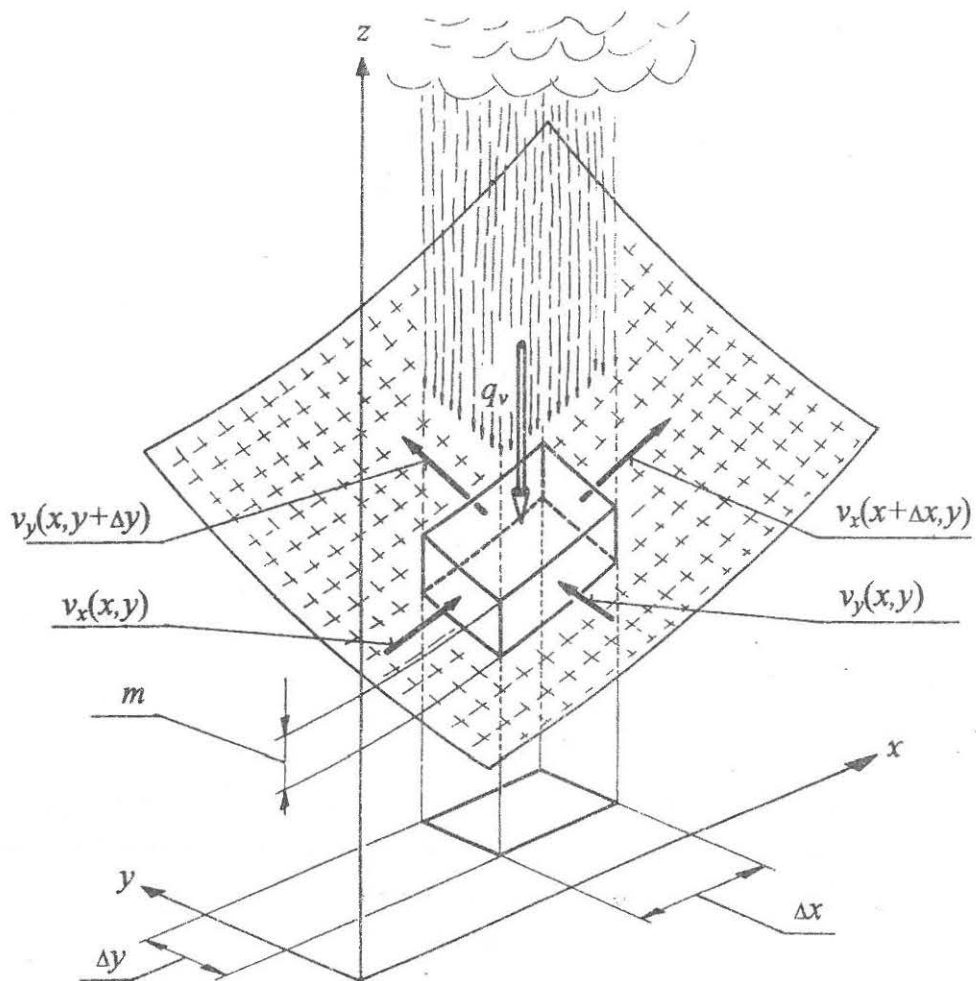
A (34)—(36) képletekben szereplő (-) előjel kifejezi, hogy ha a felület az x vagy az y tengely irányába nézve emelkedik, akkor a víz visszafelé, azaz az origó irányába folyik, tehát

$$\text{ha } \frac{\partial z}{\partial x} \geq 0, \text{ akkor } v_x \leq 0,$$

vagy

$$\text{ha } \frac{\partial z}{\partial y} \geq 0, \text{ akkor } v_y \leq 0.$$

Az összefüggések arról is számot adnak, hogy ha a felület meredek, azaz $\frac{\partial z}{\partial x}$ vagy $\frac{\partial z}{\partial y}$ nagy, akkor a víz is nagyobb sebességgel, azaz gyorsabban folyik. Látható továbbá, hogy a folyadék sebessége a vízréteg vastagságával négyzetesen növekszik. Következésképp korábbi feltevésünk helytálló abban az értelemben, hogy a vékony vízfilmben az áramlás lassú.



8. ábra. A mészkőfelszínen áramló víz teljes mélységét felölelő, "végtelenül kicsiny" térfogatelem, a tömegmegmaradás tételének alkalmazása érdekében

Figure 8. The "extremely little" volume elements showing the total depth of flowing water on limestone surface

A folyadékfilm vastagságának egyenlete

A mészkő felszínén szivárgó vízréteg vastagságának meghatározásához használjuk fel a víz tömegének megmaradását kifejező kontinuitási egyenletet és pedig olyan módon, hogy a (6) egyenlet alkalmazásának alapjául szolgáló zárt A' felületnek egy, az áramló folyadék teljes m mélységét magába foglaló (a 8. ábrán bemutatott), kicsiny, Δx és Δy alapú, ferde hasábot vegyünk. Mármost ha elvégezzük a (6)-ban kijelölt integrálásokat, és Δx ill. Δy -t minden határon túl csökkentjük (azaz határértékben Δx ill. Δy -nal nullához tartunk), akkor a (6) alábbi változatához jutunk:

$$\frac{\partial(mv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(mv_y)}{\partial y} = -\frac{q_v n}{\rho_v} \quad (6^*)$$

Az egyenlet bal oldalán előfordul a víz mélységét kifejező m mennyiség. Mivel a többi egyenletben a vízréteg h vastagsága szerepel (ami lejtős térszíneken folyó víz esetében nyilván kisebb, mint a víz függőleges irányba mért mélysége), ezért célszerű a (6^*) -ban is m helyett áttérni h -ra.

m és h között (geometriai megfontolásokból következően) fennáll az

$$m = h \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad (38)$$

kapcsolat.

A (38) kifejezést a (6^*) -ba helyettesítve, elvégezve a kijelölt deriválásokat, hosszadalmas (bár elemi) számítások után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_x h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} + v_y h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \\ = -\frac{q_v}{\rho_v} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (39) \end{aligned}$$

A (39) összefüzi a kőzetfelület differenciálgeometriai paramétereit (különböző irányokba mért dőlésszögeit és görbületeit), a víz áramlási sebességét és a folyadékfilm vastagságát.

Összefoglalás

A mészkő-sziklafelszinek korróziós folyamatának kvantitatív vizsgálata érdekében meg kell határozni a víz áramlási sebességvektorának $v_x(x,y,t)$ és $v_y(x,y,t)$ komponenseit, a folyadékfilm $h(x,y,t)$ vastagságát, a feloldott kalcium-karbonát $c(x,y,t)$ koncentrációját, végül a mészkőfelszín alakját megadó

$z=f(x,y,t)$ függvényt. A felsorolt öt ismeretlen az alábbi öt parciális differenciálegyenlet megoldásából nyerhető:

$$v_x = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (40)$$

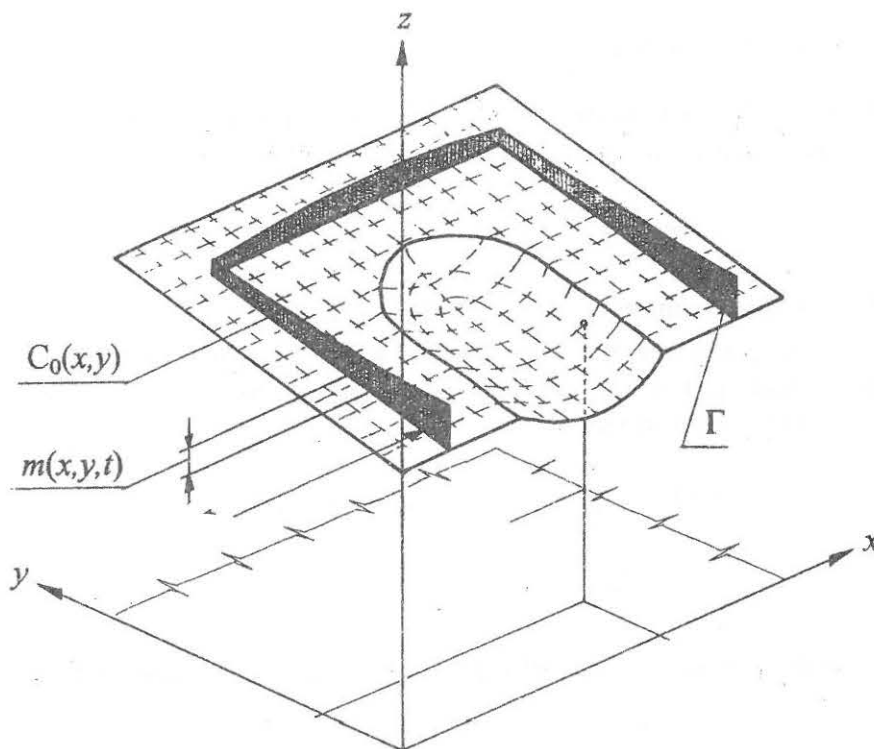
$$v_y = -\frac{\rho_v g h^2}{3\eta} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (41)$$

$$h \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_x h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} + v_y h \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{q_v}{\rho_v} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} v_x + \frac{\partial c}{\partial y} v_y = k \frac{c_e - c}{h} - \frac{c}{\rho_v h} q_v, \quad (43)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -k \frac{c_e - c}{\rho_k} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}. \quad (44)$$



9. ábra. A karsztkorrózió differenciálegyenlet-rendszerének kezdeti és peremfeltételei
 Figure 9. The original and boundary conditions of karst corrosion differential simultaneous equations

A (40)—(44) megoldásainak lehetőségeivel alább foglalkozunk.

A karsztkorrózió egyenleteinek számítógépes megoldási lehetőségei

A (40)—(44) egyenletrendszer általános megoldása sajnos nem adható meg, hanem csak a konkrét feladatok kezdeti- és peremfeltételeihez illeszkedő partikuláris megoldásai léteznek (DUBLJANSZKIJ, 1989, SZUNYOGH, 1995.c). Természetesen bizonyos megoldási sémák kidolgozhatók, melyek birtokában ezen egyenletekkel egy-egy feladattípus viszonylag könnyen vizsgálható.

A (40)—(44) egyenletrendszer igen alkalmas pl. számítógépes megoldásra, mert egyenletei szeparálhatók a benne szereplő ismeretlenek szerint, így egyidejűleg elegendő kisebb (max. három ismeretlenes) egyenletrendszereket megoldani. Alább ismertetjük e numerikus megoldás folyamatának főbb lépéseit.

Kezdeti- és peremfeltételek

Legyen adott a sziklafelszín alakját tükröző függvény a karsztkorrózió általunk tanulmányozott időszakának t_0 kezdetén, azaz

$$z(x, y, t) = z_0(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0 \quad (45)$$

ismert. Tekintsük ismertnek továbbá a folyadékfilm $H_0(x, y, t)$ vastagságát és a vízben oldott kalcium-karbonát $C_0(x, y, t)$ koncentrációját a közvetlenül felső peremei mentén (ott, ahol a szomszédos területekről a víz a vizsgált területre érkezik), azaz legyen ismert

$$h(x, y, t) = H_0(x, y, t), \quad \text{ha} \quad x, y \in \Gamma, \quad t_0 \leq t, \quad (46)$$

és

$$c(x, y, t) = C_0(x, y, t), \quad \text{ha} \quad x, y \in \Gamma, \quad t_0 \leq t, \quad (47)$$

ahol Γ jelenti a mészkőfelszín felső peremi pontjainak halmazát (9. ábra).

A karsztkorrózió paramétereinek alakulása a lepusztulás kezdeti időszakában

Képezzük (és nevezzük meg az alábbi módon) $z_0(x, y)$ ismeretében azokat a parciális deriváltakat, melyek a (40)—(42) egyenletekben szerepelnek. Ezek szerint:

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = \xi_x^{(0)}(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial y} = \xi_y^{(0)}(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = \zeta_{xx}^{(0)}(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = \zeta_{xy}^{(0)}(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = \zeta_{yy}^{(0)}(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0. \quad (52)$$

A (48)-(52)-ben szereplő $\zeta_x^{(0)}$, $\zeta_y^{(0)}$, $\zeta_{xx}^{(0)}$, $\zeta_{xy}^{(0)}$ és $\zeta_{yy}^{(0)}$ függvények nyilván ismertek. (A $^{(0)}$ index arra utal, hogy e deriváltak a t_0 időpillanatra vonatkoznak). A deriválások elvégzése (a számítógépes programhoz illeszkedően) célszerűen nem analitikus, hanem numerikus módon kell történnjen.

E függvényeket a (40)–(42) egyenletekbe helyettesítve, végül egy három ismeretlenes differenciálegyenletet nyerünk a víz (v_{x0} és v_{y0} -lal jelölt) kezdeti sebességére és a vízfilm (h_0 -lal jelölt) vastagságára:

$$v_{x0} = -\frac{\rho_V g h_0^2}{3\eta} \frac{\zeta_x^{(0)}}{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1}, \quad (53)$$

$$v_{y0} = -\frac{\rho_V g h_0^2}{3\eta} \frac{\zeta_y^{(0)}}{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} h_0 \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y0}}{\partial y} \right) + v_{x0} \frac{\partial h_0}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial h_0}{\partial y} + v_{x0} h_0 \frac{\zeta_x^{(0)} \zeta_{xx}^{(0)} + \zeta_y^{(0)} \zeta_{xy}^{(0)}}{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1} + v_{y0} h_0 \frac{\zeta_x^{(0)} \zeta_{xy}^{(0)} + \zeta_y^{(0)} \zeta_{yy}^{(0)}}{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1} = \\ = \frac{q_v}{\rho_V} \frac{1}{\sqrt{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (55)$$

A (46)-ból $H_0(x, y, t)$ függvény $t=t_0$ -ra vett helyettesítési értékét az (53) és (54)-be helyettesítve megkapjuk a sebességre vonatkozó V_{x0} és V_{y0} peremfeltételeket:

$$V_{x0} = -\frac{\rho_V g H_0^2(x, y, t_0)}{3\eta} \frac{\zeta_x^{(0)}}{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2 + 1}, \quad \text{ha} \quad x, y \in \Gamma \quad \text{és} \quad t = t_0, \quad (56)$$

ill.

$$V_{y0} = -\frac{\rho_V g H_0^2(x, y, t_0)}{3\eta} \frac{\xi_y^{(0)}}{\left(\xi_x^{(0)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(0)}\right)^2 + 1}, \quad \text{ha } x, y \in \Gamma \text{ és } t = t_0. \quad (57)$$

E peremfeltételekkel az (53)—(55) egyenletrendszer véges differenciák módszerével ($v_{x0}(x, y)$, $v_{y0}(x, y)$ és $h_0(x, y)$ változókra nézve) közvetlenül, vagy (v_{x0} , v_{y0} eliminálásával) pusztán a $h_0(x, y)$ -ra nézve számítógéppel megoldható. Megoldásukat a (43)-ba írva

$$\frac{\partial c_0}{\partial x} v_{x0} + \frac{\partial c_0}{\partial y} v_{y0} = k \frac{c_e - c_0}{h_0} - \frac{c_0}{\rho_V h_0} q_v, \quad (58)$$

amelyben már csak a folyadék c_0 kezdeti töménysége szerepel ismeretlenként. Természetesen az (58) is parciális differenciálegyenlet, tehát megoldása egy kétváltozós függvény ($c_0 = c_0(x, y)$), de szerencsére csak lineáris és első fokú, ezért meghatározása számítógéppel nem okozhat gondot. Megoldásához a (47) alapján a $c_0(x, y) = C_0(x, y, t)$, ha $t = t_0$ peremfeltétel szolgál kiegészítésül.

Végül meghatározhatjuk, hogy a kőzetfelszín valamely (tetszőleges) x — y koordinátájú pontja kezdetben milyen sebességgel süllyed. A (44) szerint ($t = t_0$ -ra vonatkoztatva):

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = -k \frac{c_e - c_0}{\rho_k} \sqrt{\left(\xi_x^{(0)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(0)}\right)^2 + 1}. \quad (59)$$

A mészkőfelszín alakja a kezdeti időpillanatot követő rövid idő elteltével

A süllyedés sebességének ismeretében meghatározhatjuk, hogy egy kicsiny Δt időtartammal későbbi ($t_1 = t_0 + \Delta t$) időpillanatban milyen függvény írja le a kőzet felszínét.

Az (59) t -szerint integrálásával:

$$z(x, y, t)|_{t=t_1} - z(x, y, t)|_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t_1} -k \frac{c_e - c}{\rho_k} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dt. \quad (60)$$

$z(x, y, t)|_{t=t_0}$ jelenti a kőzetfelszín alakját a $t=t_0$, $z(x, y, t)|_{t=t_1}$ pedig a $t=t_1$ időpillanatokra vonatkozóan, azaz

$$z(x, y, t)|_{t=t_0} = z_0(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_0. \quad (61)$$

$$z(x, y, t)|_{t=t_1} = z_1(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_1 \quad (62)$$

Alkalmazzuk a (60) jobb oldalára az integrálszámítás első középértéktételét, mely szerint minden, a t_A és t_B intervallumon folytonos és integrálható $f(t)$ függvényre fennáll, hogy

$$\int_{t_A}^{t_B} f(t) dt = (t_B - t_A) \cdot f(t^*), \quad (63)$$

ahol t^* -ről csak annyit tudni, hogy a t_A, t_B intervallum valamely belső pontja (azaz $t_A \leq t^* \leq t_B$). t_A -nak t_0 -t, t_B -nek t_1 -et választva a (60)

$$z(x, y, t)|_{t=t_1} - z(x, y, t)|_{t=t_0} = (t_1 - t_0) \left[-k \frac{c_e - c}{\rho_k} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \right]_{t=t^*} \quad (64)$$

alakot ölti.

Ha a t_1 és t_0 különbsége

$$\Delta t = (t_1 - t_0) \quad (65)$$

elegendően kicsiny, akkor t_0 , t_1 és t^* "alig" különböznek egymástól, így a (64) jobb oldalán álló, időtől függő mennyiségek argumentumába t^* helyett t_0 -t írva lényeges hibát nem követünk el. A hiba annál kisebb, mennél kisebb Δt .

Figyelembe véve a (48), (49), (61), (62) és (65) jelöléseket, a kőzetfelszín t_1 időpillanatbeli alakjára végül a

$$z_1(x, y) = z_0(x, y) - k \frac{c_e - c_0}{\rho_k} \sqrt{(\zeta_x^{(0)})^2 + (\zeta_y^{(0)})^2} + 1 \cdot \Delta t \quad (66)$$

összefüggést nyerjük.

$v_{x0}(x, y)$, $v_{y0}(x, y)$, $h_0(x, y)$, $c_0(x, y)$ és $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0}$ kifejezi a mészkőfelszín lepusztulá-

sának jellemzéséhez szükséges valamennyi adatot a $t=0$ időpillanatra vonatkoztatva.

A mészkőfelszín alakja tetszőleges időpontban

A fent levezetett összefüggések megtartják érvényességüket akkor is, ha kiindulási időpontul nem t_0 -at, hanem t_1 -et választjuk, csupán akkor az egyenletekben a "régi" (0)-indexek helyébe (1), a "régi" (1) indexek helyébe (2) írandó:

$$z_2(x, y) = z_1(x, y) - k \frac{c_e - c_1}{\rho_k} \sqrt{(\zeta_x^{(1)})^2 + (\zeta_y^{(1)})^2} + 1 \cdot \Delta t. \quad (67)$$

A (67) a (66) ismeretében már kiszámítható.

Hasonlóan folytatva a gondolatmenetet, végül tetszőleges t_n időpontra vonatkozóan is megadhatjuk a kőzetfelszín alakját.

1. Meghatározzuk a felület differenciálgeometriai paramétereit kifejező deriváltakat $z_n(x, y, t)$ ismeretében:

$$\zeta_x^{(n)}(x, y) = \frac{\partial z_n}{\partial x} \quad \text{ha} \quad t = t_n \quad (t_n = t_{n-1} + \Delta t) \quad (68)$$

$$\zeta_y^{(n)}(x, y) = \frac{\partial z_n}{\partial y}, \quad \text{ha} \quad t = t_n \quad (t_n = t_{n-1} + \Delta t), \quad (69)$$

$$\zeta_{xx}^{(n)}(x, y) = \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}, \quad \text{ha} \quad t = t_n \quad (t_n = t_{n-1} + \Delta t), \quad (70)$$

$$\zeta_{xy}^{(n)}(x, y) = \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}, \quad \text{ha} \quad t = t_n \quad (t_n = t_{n-1} + \Delta t), \quad (71)$$

$$\zeta_{yy}^{(n)}(x, y) = \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}, \quad \text{ha} \quad t = t_n \quad (t_n = t_{n-1} + \Delta t), \quad (72)$$

2. A (46)-ból $H_0(x,y,t)$ függvény $t=t_0$ -ra vett helyettesítési értékét az (53) és (54)-be helyettesítve megkapjuk a sebességre vonatkozó V_{xn} és V_{yn} peremfeltételeket:

$$V_{xn} = -\frac{\rho_V g H_0^2(x,y,t)}{3\eta} \frac{\xi_x^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1}, \quad \text{ha } x,y \in \Gamma, \text{ és } st = t_n, \quad (73)$$

ill.

$$V_{yn} = -\frac{\rho_V g H_0^2(x,y,t)}{3\eta} \frac{\xi_y^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1}, \quad \text{ha } x,y \in \Gamma, \text{ ha } t = t_n. \quad (74)$$

E peremfeltételekkel az (53)—(55) egyenletrendszer $t=t_n$ időpontra vonatkozóan, véges differenciák módszerével ($v_{xn}(x,y)$, $v_{yn}(x,y)$ és $h_n(x,y)$ -re nézve számítógéppel megoldjuk:

$$v_{xn}(x,y) = -\frac{\rho_V g h_n^2(x,y)}{3\eta} \frac{\xi_x^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1}, \quad (75)$$

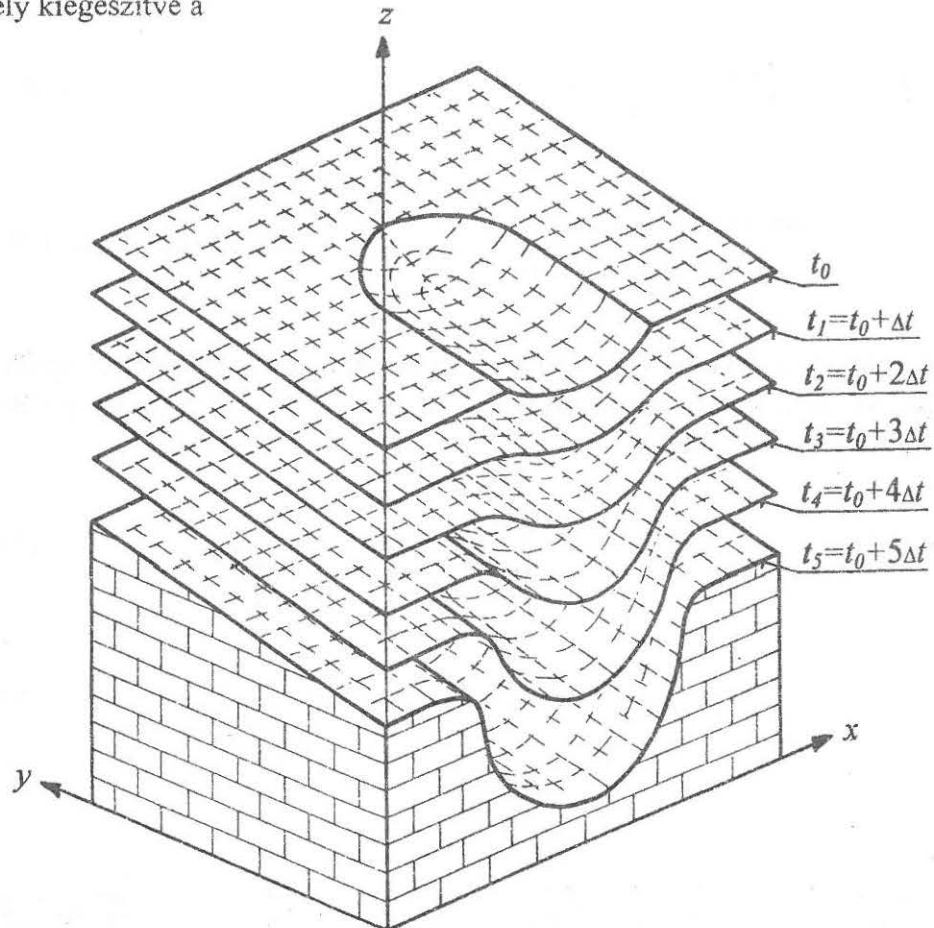
$$v_{yn}(x,y) = -\frac{\rho_V g h_n^2(x,y)}{3\eta} \frac{\xi_y^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1}, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} h_n \left(\frac{\partial v_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yn}}{\partial y} \right) + v_{xn} \frac{\partial h_n}{\partial x} + v_{yn} \frac{\partial h_n}{\partial y} + v_{xn} h_n \frac{\xi_x^{(n)} \xi_{xx}^{(n)} + \xi_y^{(n)} \xi_{xy}^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1} + v_{yn} h_n \frac{\xi_x^{(n)} \xi_{xy}^{(n)} + \xi_y^{(n)} \xi_{yy}^{(n)}}{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1} = \\ = \frac{q_v}{\rho_V} \frac{1}{\sqrt{\left(\xi_x^{(n)}\right)^2 + \left(\xi_y^{(n)}\right)^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (77)$$

Megoldását a (43)-ba írva $c(x,y,t_n)$ -re kapunk differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial c_n}{\partial x} v_{xn} + \frac{\partial c_n}{\partial y} v_{yn} = k \frac{c_e - c_n}{h_n} - \frac{c_n}{\rho_v h_n} q_v, \quad (78)$$

mely kiegészítve a



10. ábra. Elvi ábra egy kicsiny mészkőfelszíni egyenetlenség (pl. saroknyomkarr) karrá váló-fejlődésének számítógépes modellezéséhez
 Figure 10. Conceptual figure for computer modelling of rinnen development of a small unevenness (e.g. trittenkarren) on limestone surface

$$c_n(x, y) = C_0(x, y, t), \quad \text{ha } x, y \in \Gamma \text{ és } t = t_n \quad (79)$$

peremfeltétellel számítógéppel megoldható.
 Végül a (60)-ban követett gondolatmenet szerint

$$z_{n+1}(x, y) = z_n(x, y) - k \frac{c_e - c_n(x, y)}{\rho_k} \sqrt{\left(\zeta_x^{(n)}\right)^2 + \left(\zeta_y^{(n)}\right)^2 + 1} \cdot \Delta t \quad (80)$$

Mármost a megoldás menete a következő (10. ábra).

1. Meghatározzuk a kőzet felszínének $z_1(x, y)$ alakját a t_1 időpillanatra nézve.
2. $z_1(x, y)$ ismeretében meghatározzuk a felszín $z_2(x, y)$ alakját a t_2 időpillanatra nézve.
3. Ezt a procedúrát folytatjuk $t_3, t_4, t_5 \dots$ időpontok sorozatára mindaddig, amíg el nem érjük a kívánt t_n időpillanathoz tartozó $z_n(x, y)$ függvényt. A keresett megoldás tehát:

$$z(x, y, t) = z_n(x, y), \quad \text{ha} \quad t = t_n. \quad (81)$$

Az ismertett algoritmus alapján elkészíthető a sziklafelszín karsztosodásának folyamatát (korlátozási feltételek kikötése nélkül!) nyomon követő számítógépi program.

IRODALOM

- DREYBROT, W. (1988): Processes in Karst Systems. Springer-Verlag. 283.p. Berlin, 1988
- DUBLJANSZKIJ, J. V. (1989): A víztükör alatti gömbfülke-képződés elméleti vizsgálata—*Karszt és Barlang* I-II. p.29-31
- FRANK, Ph., MIESES, R. (1967): A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1967
- JAKUCS, L. (1971): A karsztok morfogenetikája. Akadémiai kiadó, Budapest, 1971
- SZUNYOGH, G. (1994): Szabad, talajjal nem borított mészkőfelszín karsztosodásának általános egyenletrendszere—*Karsztfejlődés I. (Totes Gebirge karrjai)*. Pauz kiadó, Szombathely. p. 145-164
- SZUNYOGH, G. (1995.a): A matematikai modellezés helye és szerepe a karsztosodással járó folyamatok leírásában — *Karszt és Barlangkutató*. X. évf. 1981-95. p. 251-269
- SZUNYOGH, G. (1995.b): Karcsatornák vízszállító képességének elméleti meghatározása — *IV. Karsztológiai Szeminárium*. Szombathely, 1995
- SZUNYOGH, G. (1995.c): Mészkőfelszíni alakzatok kialakulásának fizikája — *Studia Physica Savariesia. III.* Szombathely, 1995. p. 9.1-9.11

VERESS, M., PÉNTEK, K. (1990): Kísérlet a karsztos felszínnek denudációjának kvantitatív leírására—*Karszt és Barlang* I. p. 19-28
VERESS, M., PÉNTEK, K. (1992): Felszíni karsztos formák vizsgálata matematikai módszerekkel—*Oktatási intézmények karszt és barlangkutató tevékenységének II. országos konferenciája*, Szombathely. p.21-29