KARRVÁLYÚK VÍZSZÁLLÍTÓ-KÉPESSÉGÉNEK ELMÉLETI MEGHATÁROZÁSA

SZUNYOGH GÁBOR
Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola, Földrajz Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi G. tér 4.

Összefoglalás:
A tanulmányban analitikusan meghatározzuk és diagramban ábrázoljuk a részlegesen telt, metszetében ellipszissel közelíthető karrvályúk hidraulikus sugarát és a vízszállítás szempontjából hatékony keresztmetszetét. Ezekre alapozva nomogrammokat mutatunk be az áramló víz sebességének ill. hozamának gyors kiszámítására.

A probléma megfogalmazása

Magas-hegységi karsztos felszíneken gyakran találkozunk különböző hosszúságú vályúkkal, karros csatornákkal. Mivel ezek a csatornák rendszerint mélybe vezető kürtőkben végződnek és felső szakaszuk általában vízgyűjtő-medenceszerűen szétterül feltételezhető, hogy működésük idején jelentős mennyiségű vizet szállítanak. Ez a víz agresszív kémiai jellege révén részben a mészkőhegység földalatti járatait, részben magukat a csatornákat tágítja, bővíti. Következésképpen e csatornák kialakulásának tanulmányozása során nem szabad figyelmen kívül hagyni vízszállító képességüket, azaz ismerni kell, hogy milyen sebességgel, milyen hozammal áramolhat bennük a víz.

A vízhozam ismeretében pl. megállapítható a vályú vízgyűjtő területének kiterjedése, vagy meghatározható, hogy adott mederteltség esetén milyen csapadékhozam jellemezhette a szóban forgó területet, ill. kiszámítható, hogy adott csapadékhozam esetén menyi ideig folyhatott víz csatornában. A vályúbeli áramlási sebesség birtokában pedig (akár már elemi karsztkorróziós képletek felhasználásával) számszerű becslések adhatók a meder tágulásának ütemére nézve.

A karrcsatornák működésének ill.oldódásának kérdése úgy is felvethető, hogy adott időtartamú, adott csapadékhozamú vízutánpótlódás esetén milyen mederteltségre lehet számítani, ill. mekkora lesz a csatorna bővülése ezen idő alatt.

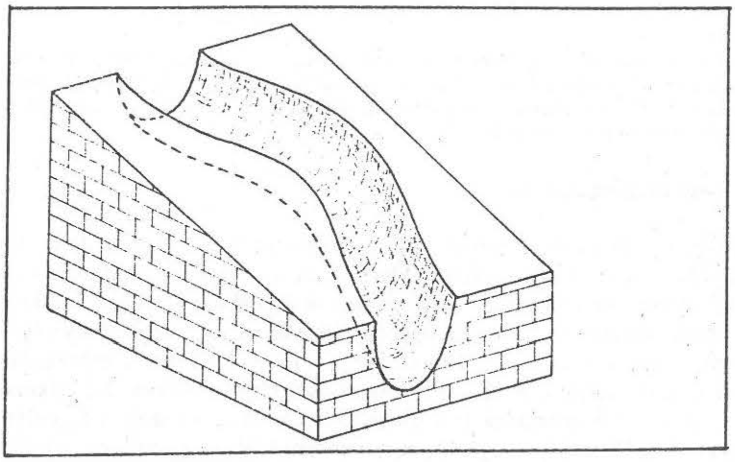
Mindezen feladatok hidraulikai szempontból négy kérdés kidolgozását követelik meg.

1. Meghatározandó adott alakú, adott mederteltségű vályú áteresztő képessége (azaz vízhozama) és a benne folyó víz sebessége.
2. Meghatározandó, hogy adott vízgyűjtő területről, adott intenzitású csapadék esetén milyen vízhozamú patakoknak kell a csatornán átfolyni.
3. Adott mederkitöltöttség mellett, adott agresszivitást feltételezve időegység alatt mennyivel bővül a csatorna.
4. Meghatározandó, hogy adott éves csapadékhozam és adott csapadék intenzitás estében mekkora az évenkénti effektív működési idő, ill. ennek alapján az évi átlagos mederbővülés.

Amennyiben táblázatok ill. nomogramok e négy kérdésre választ adnak, úgy számos karsztkorróziós feladat megoldására nyílik lehetőség.

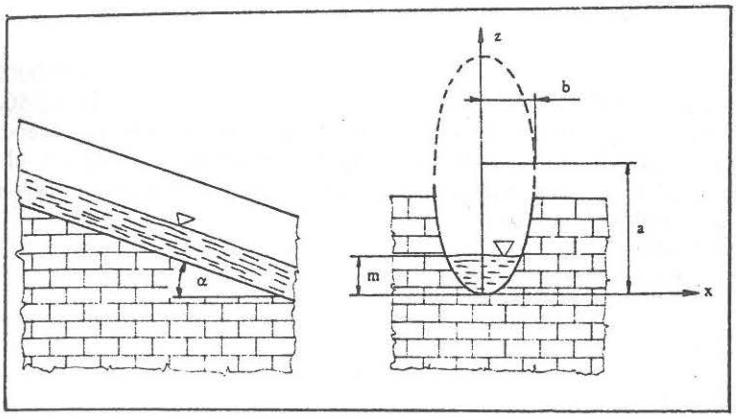
A karrvályúk idealizált modellje

Bár a valóságban a karrcsatornák viszonylag bonyolult, kanyargós, változó keresztmetszetű, szabálytalan alakú mélyedések (*1. ábra*), első lépésben mégis közelíthetők viszonylag egyszerű geometriai alakzatokkal..



1. ábra: Egy valódi karrvályú rajza

A legegyszerűbb, de a valóságot már viszonylag jól közelítő alak az ellipszis keresztmetszetű, egyenes nyomvonalú, állandó keresztmetszetű, henger alakú vályú. Jelölje e vályú lejtőszögét a, az ellipszis függőleges- és vízszintes tengelyét a ill. b, a csatorna vízmélységét m (*2. ábra*).



2. ábra: A csatornák idealizált modelljének vázlata

Felhasználandó fizikai törvények

A csatornában áramló víz sebességét a szabad felszínű áramlással foglalkozó szakirodalom *CHÉZY (BAÁN,* 1973) nyomán az alábbi képlettel határozza meg:

$$v = k \cdot \sqrt{r \cdot \sin\alpha}\,, \qquad (1)$$

ahol
v – a víz sebessége;
r – a csatorna hidraulikus sugara;
k – a csatorna felületi érdességétől és hidraulikus sugarától függő tényező.
k értékére a különböző szerzők eltérő – tapasztalati – képleteket adnak meg.
BAZIN és *KUTTER* –*(BAÁN,* 1913) szerint pl.

$$k = \frac{\sqrt{C}}{1+\sqrt{\frac{D}{r}}}, \qquad (2)$$

ahol C és D a csatorna felületének simaságától függő tényezők. Számértékük:
BAZIN szerint C=7570 m/s^2, *KUTTER* szerint pedig C=10 000 m/s^2. *BAZIN* a viszonylag sima, *KUTTER* a durvább felületű csatornákkal foglalkozott. *BAZIN* szerint D értéke a főbb csatorna-típusok esetére a következő:

Acél vagy műanyag cső	D=0,0036 m
Sima, rakott falazat	D=0,0256 m
Betonfal	D=0,2116 m
Földcsatorna.	D=0,7225 m

Kutter az alábbi csatorna-típusokra adta meg D értékét:

Sziklásmedrű csatorna	D=1,5625 m
Szabályos földcsatorna	D=2,2500 m
Kavicsos földcsatorna	D=3,0625 m

Patak, folyó D=4,0000 m

Benőtt medrű, hordalékos vizű csatorna D=6,2500 m

A karrcsatornák besorolása ebbe a rendszerbe meglehetősen nehéz, szerencsés lenne erre vonatkozó in situ méréseket végezni. Morfológiai analógiák alapján ajánlatos a *KUTTER* által vizsgált csatornák közül a sziklásmedrű csatornára vonatkozó adatokat alkalmazni.

Egy szabadfelszínű vízfolyás hidraulikus sugara alatt a vízzel kitöltött mederkeresztmetszet és a nedvesített mederkerület hányadosát értjük:

$$r=\frac{A}{s}, \tag{3}$$

ahol

A – a vízzel kitöltött meder-keresztmetszet;

s– a nedvesített mederkerület hossza.

Az átlagos vízhozam

$$\dot{Q}=v\cdot A\ . \tag{4}$$

A vályúk hidraulikus sugarának meghatározása

A meder keresztmetszetének területe. A karrvályú keresztszelvényének egyenlete (a *2. ábrát* figyelembe véve):

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(z-a)^2}{a^2}=1\ . \tag{5}$$

A meder effektív keresztmetszete:

$$A=\int_{z=0}^{m}2\cdot x(z)dz\ , \tag{5}$$

ahol

$$x=b\cdot\sqrt{2\cdot\frac{z}{a}-\left(\frac{z}{a}\right)^2}\ , \tag{6}$$

melyet az (5)-be helyettesítve

$$A=\int_{z=0}^{m}2\cdot b\cdot\sqrt{2\cdot\frac{z}{a}-\left(\frac{z}{a}\right)^2}dz. \tag{7}$$

Az integrál kiszámításánál alkalmazzunk $\frac{z}{a}$ helyettesítést, és ezzel összhangban vezessük be $\kappa=\frac{m}{a}$, ill. a $\lambda=\frac{b}{a}$ jelöléseket. κ hidrológiai szóhasználattal *mederteltségnek* mondható, λ pedig *az ellipszis excentricitása.*

E jelölésekkel a meder keresztmetszete

$$A = \int_{z=0}^{\kappa} 2 \cdot \lambda \cdot a^2 \cdot \sqrt{2 \cdot u - u^2}\, du. \tag{8}$$

a kihasználva, hogy

$$\int \sqrt{2u - u^2}\, du = \frac{u-1}{2}\sqrt{2u - u^2} - \text{arc sin}\,(1 - u), \tag{9}$$

végül a csatorna keresztmetszetére

$$A = \lambda \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}(1-\kappa) + (\kappa - 1)\sqrt{2\kappa - \kappa^2}\right] \cdot a^2 \tag{10}$$

kifejezést nyerjük.

Vezessük be az

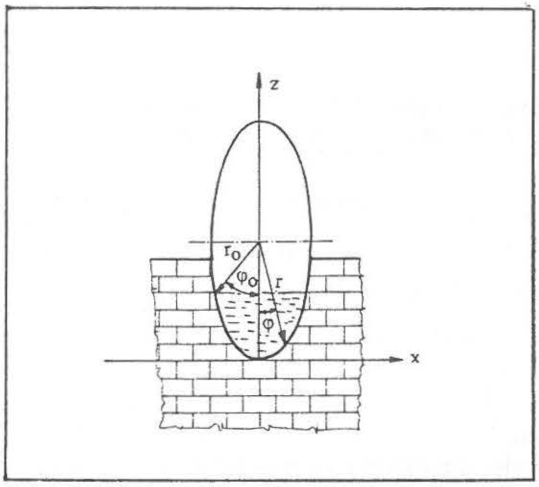
$$F(\kappa, \lambda) = \lambda \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}(1-\kappa) + (\kappa - 1)\sqrt{2 \cdot \kappa - \kappa^2}\right] \tag{11}$$

segédfügvényt. Így a meder keresztmetszete

$$A = F(\kappa, \lambda) \cdot a^2 \tag{12}$$

képlettel állítható elő.

A meder nedvesített kerülete. A nedvesített kerület meghatározása érdekében vezessünk be poláris koordináta-rendszert, melynek origója a meder alakját közelítő ellipszis középpontjában van, $\varphi = 0$ tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat (*3. ábra*).



3. ábra: A meder nedvesített kerületének számításához szükséges poláris koordináta-rendszer elhelyezkedése

A kétféle koordináta-rendszer közötti átszámítási képletek a következők:

$$x = r \cdot \sin\varphi \\ z = a - r \cdot \cos\varphi , \tag{13}$$

melyeket az (5)-be helyettesítve az ellipszis egyenletére

$$\frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi + \frac{r^2 \cdot \cos^2\varphi}{a^2} = 1 \tag{14}$$

összefüggést nyerjük. Kifejezve belőle r-t:

$$r = \frac{b}{\sqrt{\sin^2\varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \cos^2\varphi}} . \tag{15}$$

Kihasználva a már korábban bevezetett

$$\lambda = \frac{b}{a} \tag{16}$$

új változó adta összevonási lehetőséget, az ellipszis egyenlete tömörebben írható:

$$r = \frac{b}{\sqrt{\sin^2\varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2\varphi}} . \tag{17}$$

A nedvesített kerület az ellipszis $\pm\varphi_0$ határok között vett ívhossza, amely az ívhosz számítási képlete szerint:

$$s = \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi . \tag{18}$$

A (17)-be r-helyébe a (16)-ot írva, elvégezve a (17)-integranduszában kijelölt deriválást, az ívhosszra az alábbi integrált kapjuk:

$$s = \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \sqrt{r^2 + b^2 \cdot \left(\frac{2\sin\varphi \cdot \cos\varphi - 2\lambda^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \sqrt{\sin^2\varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2\varphi}^{\,3}}\right)^2}\, d\varphi . \tag{19}$$

Hosszas átrendezések után a (18)

$$s = 2 \cdot b \cdot \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\sin^4\varphi + \lambda^4\cos^4\varphi + \left(1 + \lambda^4\right) \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{2 \cdot \sqrt{\sin^2\varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2\varphi}^{\,3}}}\, d\varphi . \tag{20}$$

alakba hozható.

Az integrálás elvégzése előtt még meg kell határozni az integrál felső határát. A nedvesített kerület legfelső pontjára felírható az alábbi egyenlet:

$$a - r\left(\varphi_0\right) \cdot \cos\varphi_0 = m . \tag{21}$$

r helyére beírva a (16) által definiált függvényt:

$$a - \frac{b}{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0}} \cdot \cos\varphi_0 = m, \qquad (22)$$

majd φ_0-ra megoldva az integrálás felső határául

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda}{\kappa - 1}\sqrt{2\kappa - \kappa^2}\right) \qquad (23)$$

kifejezést nyerjük.

Vezessük be a

$$G(\kappa, \lambda) = \int_0^{\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda}{\kappa-1}\sqrt{2\kappa-\kappa^2}\right)} 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{\frac{\sin^4 \varphi + \lambda^4 \cos^4 \varphi + \left(1 + \lambda^4\right) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi}^3}} d\varphi \qquad (24)$$

segédfüggvényt. Így a nedvesített kerület viszonylag tömören kifejezhető:

$$s = G(\kappa, \lambda) \cdot a \qquad (25)$$

Tehát *a vályú hidraulikus sugara* a (11) és (24) hányadosaként előállítva:

$$r = \lambda \frac{F(\kappa)}{G(\kappa, \lambda)} \cdot a . \qquad (26)$$

Látható, hogy a hidraulikus sugár a (25) szerint két tényezőből áll. Az első az ellipszis méretétől független, csak az ellipszis excentricitását és a mederteltséget tartalmazza változóként. A második tag viszont csak a medert magába foglaló ellipszis függőleges tengelyétől függ. Ennek megfelelően (a táblázatos kiértékelés kényelmesebb használata érdekében) célszerű az első tényezőt külön, éspedig egy kétváltozós függvényként előállítani. A (25) alapján tehát

$$H(\kappa, \lambda) = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin}(1 - \kappa) + (\kappa - 1)\sqrt{2\kappa - \kappa^2}}{\int_0^{\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda}{\kappa-1}\sqrt{2\kappa-\kappa^2}\right)} 2 \cdot \sqrt{\frac{\sin^4 \varphi + \lambda^4 \cos^4 \varphi + \left(1 + \lambda^4\right) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi}^3}} d\varphi} \qquad (27)$$

A hidraulikus sugár ennek megfelelően

$$r = H(\kappa, \lambda) \cdot a . \qquad (28)$$

A csatornában folyó víz sebessége és hozama

A (28) összefüggést az (1) ill. (2) egyenletekbe helyettesítve a víz sebességére

$$v = \frac{\sqrt{C}}{1+\sqrt{\dfrac{D}{H(\kappa,\lambda)\cdot a}}} \cdot \sqrt{H(\kappa,\lambda)\cdot a \cdot \sin\alpha} \tag{29}$$

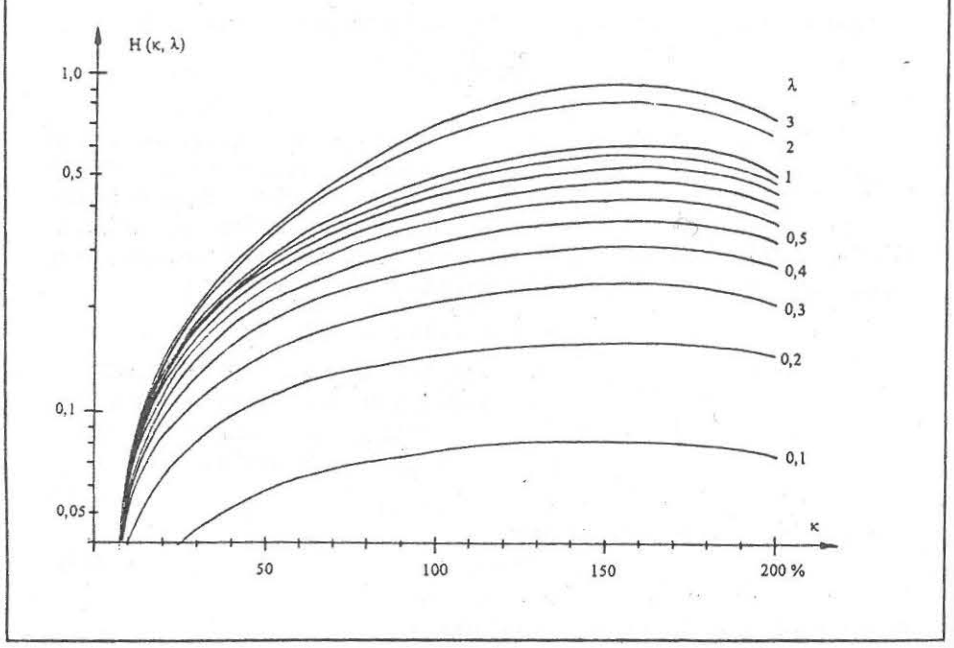
kifejezést nyerjük.

Az átlagos vízhozamot a (4) segítségével számíthatjuk, ha v és A helyébe a (28) ill. (12)-t helyettesítjük:

$$\dot{Q} = \frac{\sqrt{C}\cdot F(\kappa,\lambda)}{1+\sqrt{\dfrac{D}{H(\kappa,\lambda)\cdot a}}} \cdot \sqrt{H(\kappa,\lambda)\cdot a^5 \cdot \sin\alpha}\,. \tag{30}$$

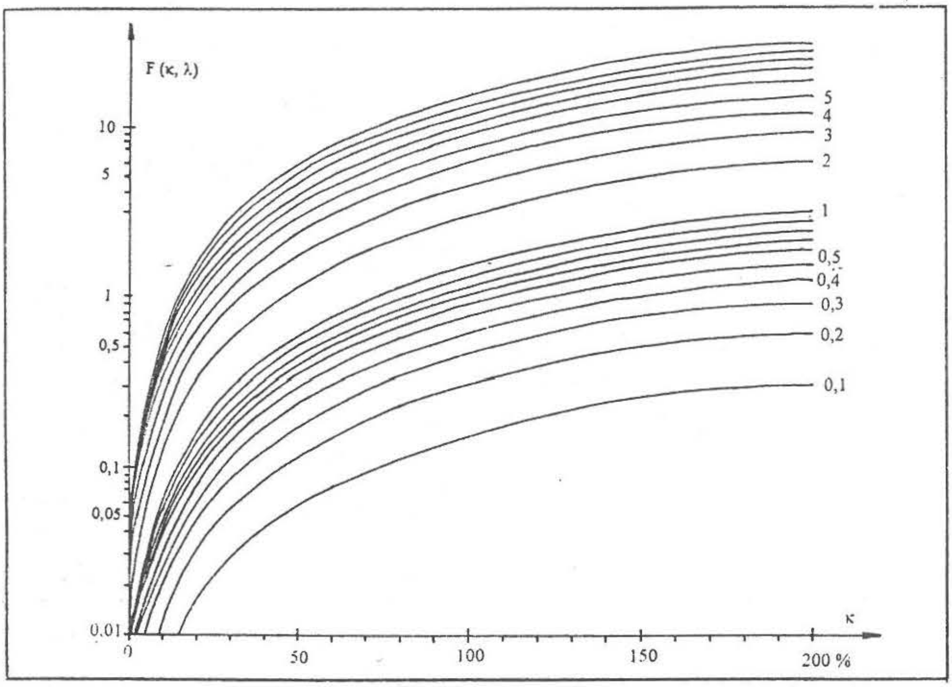
A levezetett összefüggések kvalitatív és kvantitatív kiértékelése

E rövid tanulmány keretében meghatároztuk az ellipszis-szelettel közelíthető keresztmetszetű karrcsatornák hidraulikus sugarát a vízfolyás mederteltségének és az ellipszis excentricitásának függvényében.



4. ábra: A hidraulikus sugár H(κ, λ) tényezője, a κ mederteltség és a meder λ excentricitása függvényében

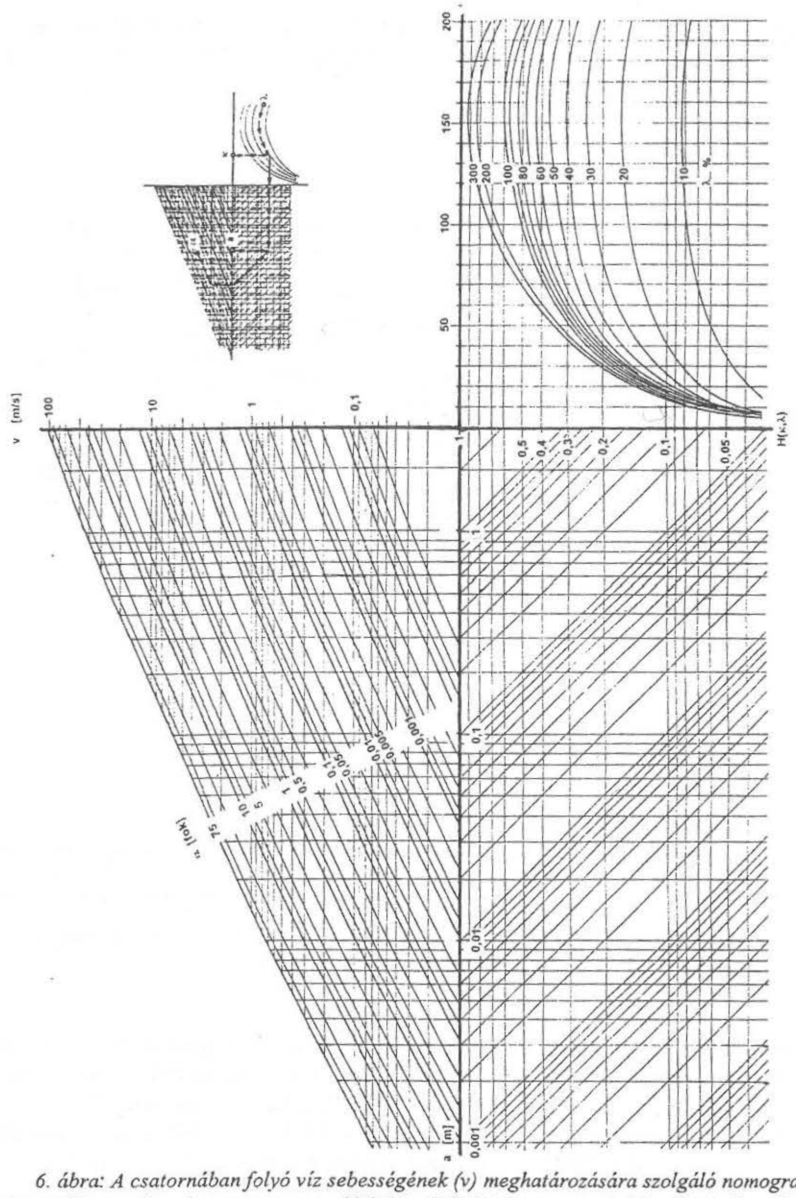
Kiderült, hogy a hidraulikus sugár nem állítható elő (zárt alakban), elemi függvényekkel ezért meghatározásához számítógépre volt szükség. A numerikus kiértékelés eredményét a *4.* és *5. ábrán* ismertetjük.



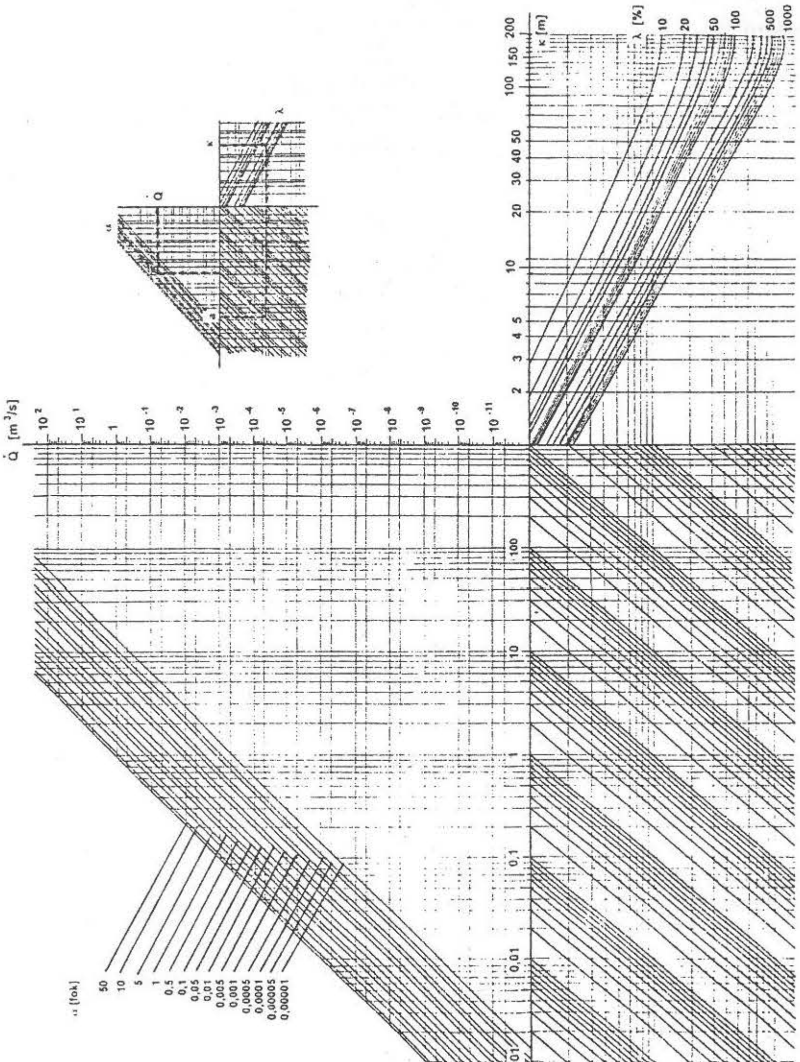
5. ábra: A csatorna vízzel kitöltött keresztmetszetének F(κ, λ) tényezője, a κ mederteltség és a meder λ excentricitása függvényében

A mederben folyó víz sebességét a (29) összefüggés alapján szerkesztett nomogram segítségével határozhatjuk meg, melyet a *6. ábra* mutat. A nomogram bemenő paraméterei a vályú szelvényét közelítő ellipszis nagytengelye és excentricitása, a mederteltség és a csatorna lejtése. Ezek ismeretében, a nomogram jobb felső mezejében látható kis segédábra szerinti útvonalat követve leolvashatjuk a víz sebességét. E nomogram segítségével az is meghatározható, hogy egy adott geometriájú csatornát milyen magasságig tölt ki adott sebességű víz.

A vályú vízhozamának megállapítására (a (30) szerint) a *7. ábrán* közölt nomogram használható. Használata ebben az esetben is a mellékelt segédábra alapján történhet.



6. ábra: A csatornában folyó víz sebességének (v) meghatározására szolgáló nomogram. Bemenő paraméterek: a csatorna profilját közelítő ellipszis excentricitása (λ) és függőleges helyzetű tengelye (a), a mederteltség (κ) és a csatorna lejtésének szöge (α)



7. ábra: A csatornában folyó víz hozamának ($\dot{Q}$) meghatározására szolgáló nomogram. Bemenő paraméterek: a csatorna profilját közelítő ellipszis excentricitása (λ) és függőleges helyzetű tengelye (a), valamint a mederteltség (κ)

Irodalom

BAÁN, Á.: (1973) Áramlástan. Tankönyvkiadó, Budapest,

SCHMIEDER, A.,–KESSERŰ, ZS., et. al.: (1975) Vízveszély és vízgazdálkodás a bányászatban. Műszaki könyvkiadó, Budapest,